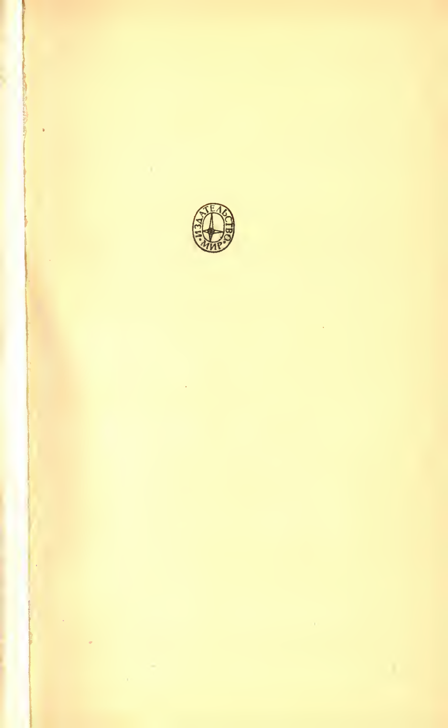
С. Страшевич,
Е. Бровкин
ПОЛЬСКИЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
ОЛИМПИАДЫ

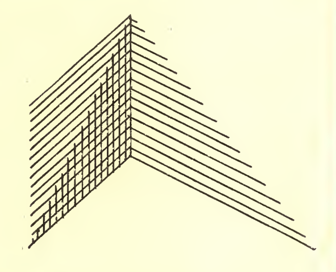
AB

$n_1 + n_2 + \ldots + n_n$


ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

J. Browkin, J. Rempała,
St. Straszewicz

25 LAT OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ



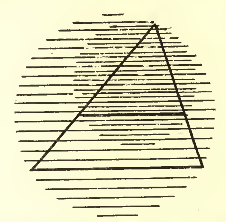
WYDAWNICTWA SKOLNE I PEDAGOGICZNE
WARSZAWA, 1975

ЗАДАЧИ И ОЛИМПИАДЫ

С. Страшевич, Е. Бровкин

ПОЛЬСКИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ

Предисловие
А. Пелчинского и А. Шинцеля
Перевод с польского Ю. А. Данилова
под редакцией В. М. Алексеева



ИЗДАТЕЛЬСТВО · МИР · МОСКВА
1978

512 513
С 83

Страшевич С., Бровкин Е.

С 83 Польские математические олимпиады. Предисл. А. Пелчинского и А. Шинцеля. Пер. с польск. Ю. А. Данилова под ред. В. М. Алексеева. М., «Мир», 1978.

338 с. с ил. (Задачи и олимпиады).

В книге собраны задачи, предлагавшиеся на польских математических олимпиадах с 1950 по 1976 гг. К составлению задач привлекались лучшие математические силы страны.

Книга рассчитана на всех тех, кто серьезно увлечен математикой.

С $\frac{20202-177}{041(01)-78}$ 177—78 512 513

Редакция научно-популярной и научно-фантастической литературы

© Перевод на русский язык, «Мир», 1978

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Сборником «Польские математические олимпиады» издательство «Мир» продолжает серию «Задачи и олимпиады». Как и в предыдущих книгах этой серии[1], читатель найдет здесь большое количество задач (всего их около двухсот), снабженных подробными решениями. Эти задачи предлагались в 1949—1976 гг. на различных этапах математических олимпиад, проводимых ежегодно в Польской Народной Республике для учащихся средних школ и профессиональных училищ.

В течение двадцати лет Главный комитет математической олимпиады возглавлял профессор Стефан Страшевич — один из авторов этой книги. Многие победители олимпиад ныне — видные ученые, имена которых хорошо известны как в самой Польше, так и за ее пределами. К их числу принадлежат профессор Александр Пелчинский, профессор Анджей Шинцель и доцент Ежи Бровкин, чьи имена советский читатель также найдет на титульном листе этой книги и которые были в числе победителей I, II и III олимпиад соответственно. Подробнее об истории польских математических олимпиад и об их организационной структуре рассказано в предисловии А. Пелчинского и А. Шинцеля, написанном специально для русского издания. Оно заменило предисловие Я. Ремпалы, рассчитанное на польского читателя. (В оригинале обязанности авторов распределены следующим образом: Я. Ремпале принадлежит предисловие, С. Страшевичу — решения задач 1—120, Е. Бровкину — решения задач 121—150.)

---

[1] Тригг Ч. Задачи с изюминкой. М., «Мир», 1975; Кюршак И. и др. Венгерские математические олимпиады. М., «Мир», 1976; Избранные задачи. М., «Мир», 1977.

Сравнивая задачи настоящего сборника с задачами других математических олимпиад (например, всесоюзных, московских, венгерских), можно отметить их несколько бо́льшую традиционность. Любителей экзотики это, быть может, слегка разочарует, но зато, несомненно, привлечет тех, кто ценит в математике сдержанность и строгость формы, добротность содержания и даже некоторую суховатость. Решения задач написаны обстоятельно и подробно, так что не было нужды, как в предыдущих книгах серии, дополнять их пространным комментарием. Если отвлечься от собственно «олимпийских» забот (оргкомитеты всегда интересуются задачами), то эта книга мне представляется хорошим подспорьем для учителей, организующих математические факультативы, и для их вдумчивых учеников.

Книга содержит задачи первых двадцати пяти олимпиад. Бо́льшая часть задач относится к третьему туру[1]; после XX олимпиады это становится правилом. Для настоящего издания авторы любезно прислали еще и задачи третьего тура последующих двух олимпиад. Кроме того, в приложении мы даем примеры задач первых двух туров 1970—1976 гг., заимствуя их из сборников, издаваемых ежегодно Главным комитетом[2].

Пользуюсь случаем, чтобы поблагодарить авторов книги, авторов предисловия и Главный комитет польской математической олимпиады, проявивших добрую волю и готовность к сотрудничеству. Их благожелательная помощь несомненно способствовала улучшению книги.

Наконец, хочется сказать несколько слов и о всей серии «Задачи и олимпиады». С тех пор как увидела

---

[1] К первым турам относятся задачи 4, 7, 9, 16, 22, 23, 25, 31, 37, 43, 44, 61; ко вторым — 1, 2, 13, 26, 34, 46, 55, 58, 67, 73, 85, 91, 95, 97, 103, 105, 109, 110, 112. Номер олимпиады можно вычислить по формуле [(номер задачи — 1) : 6] + 1 (квадратными скобками обозначена целая часть числа). Н. Я. Виленкин обратил мое внимание на то, что в аналогичную формулу, приведенную в предисловии к «Венгерским математическим олимпиадам», вкралась неточность, из-за чего в некоторых случаях получается неверный результат. Правильное выражение получается, если в написанной выше формуле заменить 6 на 3. Полный свод задач всех туров I—XX олимпиад можно найти в книге S. Straszewicz „Zadania z olimpiad matematicznych" (tt. I—IV, Warszawa, RZWS, 1956—1972).

[2] XXII—XXVI olimpiada matematyczna, Warszawa, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1970—1976.

свет и мгновенно разошлась ее первая книга, я имел возможность убедиться в том, что «активный решатель задач» действительно существует. Всем, кто письменно или устно сообщал мне свои замечания по поводу формулировок или решений отдельных задач и по составу сборников в целом, я выражаю свою искреннюю признательность. Особенно я хотел бы поблагодарить Н. И. Фельдмана и Е. А. Горина, к чьей дружеской помощи неоднократно прибегал.

Предостережение самым молодым читателям — тем, кто еще учится в школе или год-два назад окончил ее: в геометрических задачах и их решениях сохранены традиционные, «адамаровские», обозначения и терминология, расходящиеся с тем, что принято в новых школьных учебниках.

В. М. Алексеев

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

В Польской Народной Республике математические олимпиады проводятся с 1949 г. Их организатором является Польское математическое общество (ПМО), объединяющее в своих рядах широкие круги математиков страны. Решение о проведении этих олимпиад президиум ПМО принял по инициативе министра просвещения доктора Станислава Скжешевского и председателя ПМО профессора Казимира Куратовского. Немалую роль здесь сыграл пример математических олимпиад, практиковавшихся советскими математиками (Москвы и Ленинграда).

Организационные формы проведения олимпиад было поручено разработать специальной комиссии ПМО под руководством профессора Стефана Страшевича. Представленный комиссией проект получил одобрение, и Министерство просвещения ПНР издало приказ от 31 ноября 1949 г., который заложил правовые основы олимпиады. Так возникла математическая олимпиада, охватившая вскоре всю страну (в этом отношении она напоминает венгерские математические олимпиады имени Этвёша, проводимые с 1894 г.).

Первым председателем созданного в 1949 г. Главного комитета математической олимпиады стал профессор Стефан Страшевич, а ее первым руководителем — профессор Казимир Заранкевич. Их заслуги в организации польских математических олимпиад трудно переоценить. Профессор Страшевич возглавлял Главный комитет на протяжении 20 лет.

Математические олимпиады в ПНР протекают следующим образом. В каждом учебном году проводятся три тура. Участие в них сугубо добровольное, право на него имеют учащиеся средних общеобразовательных

школ и профессиональных училищ. Организацией олимпиады занимается Главный комитет математической олимпиады, образованный Министерством просвещения по предложению Польского математического общества, и подчиненные ему окружные комитеты. Главный комитет отбирает 24 задачи для всех трех туров. Задачи эти, как правило, оригинальны, но для первого тура иногда используются задачи, уже предлагавшиеся на математических олимпиадах в других странах.

Первый тур математической олимпиады начинается с первых дней учебного года и длится три месяца. В начале каждого месяца учащиеся получают по четыре задачи, которые они должны решить дома в течение месяца. Эти задачи рассылаются по всем общеобразовательным и специальным школам. Учащиеся, пожелавшие принять участие в олимпиаде, присылают свои решения в ближайший окружной комитет, который обычно находится в одном из университетских центров. В обязанности окружных комитетов входит оценка присланных решений и отбор авторов лучших решений для участия во втором туре.

Второй тур олимпиады носит характер письменного экзамена. Проводится он в течение двух дней одновременно во всех тех учебных заведениях, где размещаются окружные комитеты. Ежедневно учащимся предлагают в течение пяти часов решить по три задачи. Окружные комитеты оценивают работы участников второго тура, и на этом основании Главный комитет составляет окончательные списки допущенных к третьему туру.

Третий тур проводится в Варшаве, число задач и время, отводимое для их решения, такие же, как и во втором туре, но характер задач значительно усложняется. Работы участников третьего тура оценивает Главный комитет. Авторы лучших решений награждаются дипломами победителей. Из их числа составляется национальная команда для участия в международных олимпиадах. Кроме того, Главный комитет присуждает поощрительные награды тем участникам третьего тура, которые, хотя и не решили всех задач, но предложили какие-то оригинальные решения.

Удачное выступление на математической олимпиаде дает ее участникам определенные преимущества при поступлении в вузы. Так, учащиеся, допущенные к третьему

туру, зачисляются на математические факультеты высших учебных заведений без вступительных экзаменов. Победители олимпиады принимаются также без вступительных экзаменов на математические, физические, химические и технические факультеты.

В заключение приведем некоторые статистические данные. За 25 лет существования математической олимпиады в ней приняли участие 36 544 человека, из них 15% составили учащиеся профессиональных училищ. Почти каждый четвертый участник первого тура бывал допущен ко второму туру, почти каждый четвертый участник второго тура выходил в финал, а каждый пятый участник третьего тура был удостоен награды.

Из победителей первых десяти олимпиад 19 человек стали профессорами и 26 — доцентами математики и других точных наук.

А. Пелчинский
А. Шинцель

ЗАДАЧИ

Олимпиада 1949—1950 гг.

1. Доказать, что если числа a, b, c положительны и $abc = 1$, то

$$a + b + c \geqslant 3.$$

2. Решить в целых числах уравнение

$$y^3 - x^3 = 91.$$

3. Доказать, что если натуральное число n больше 4 и не простое, то произведение последовательных натуральных чисел от 1 до $n - 1$ делится на n.

4. На окружности выбраны точки A, B и C.

Доказать, что основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки M окружности на прямые AB, BC и CA, лежат на одной прямой.

5. Доказать, что если две высоты тетраэдра пересекаются, то пересекаются и две другие его высоты.

Высотами тетраэдра мы называем здесь прямые, проведенные через его вершины перпендикулярно противолежащим граням.

6. Ключом, отверстие которого имеет в сечении форму правильного шестиугольника со стороной a, требуется открутить гайку, имеющую в сечении форму квадрата со стороной b.

Какому условию должны удовлетворять длины отрезков a и b, чтобы это можно было сделать?

Олимпиада 1950—1951 гг.

7. Какому условию должны удовлетворять коэффициенты квадратных трехчленов

$$x^2+mx+n \quad \text{и} \quad x^2+px+q,$$

для того чтобы между корнями каждого из них был заключен корень другого?

Здесь m, n, p, q — действительные числа.

8. Какие цифры следует вписать вместо нулей, стоящих на третьем и пятом месте в числе 3 000 003, чтобы получить число, делящееся на 13?

9. Доказать, что если сумма положительных чисел a, b, c равна 1, то

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 9.$$

10. Балка длиной a подвешена горизонтально за концы на двух параллельных тросах одинаковой длины b. Повернем балку на угол φ вокруг вертикальной оси, проходящей через середину балки. На сколько поднимется при этом балка?

11. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. Прямые AB и CD пересекаются в точке E, прямые AD и BC — в точке F. Биссектриса угла AEC пересекает сторону BC в точке M и сторону AD в точке N, а биссектриса угла BFD пересекает сторону AB в точке P и сторону CD в точке Q.

Доказать, что четырехугольник $MPNQ$ — ромб.

12. Даны окружность и отрезок MN.

Найти на окружности точку C, такую, чтобы треугольник ABC, где A и B — точки пересечения с окружностью прямых MC и NC, был подобен треугольнику MNC.

Олимпиада 1951—1952 гг.

13. Выяснить, каким необходимым и достаточным условиям должны удовлетворять действительные числа a, b, c для того, чтобы уравнение

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

имело три вещественных корня, образующих арифметическую прогрессию.

14. Доказать, что если углы A, B, C треугольника удовлетворяют соотношению

$$\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C = 1,$$

то один из углов равен 120°.

15. Доказать, что ни при каком натуральном n число

$$1 + 2 + \ldots + n$$

не может заканчиваться ни одной из цифр 2, 4, 7, 9.

16. Доказать, что если ни один из углов A, B, C, D выпуклого четырехугольника $ABCD$ не является прямым, то

$$\frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} D}{\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C \operatorname{tg} D} = \operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C + \operatorname{ctg} D.$$

17. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC точки M, N, P выбраны так, что

$$\frac{BM}{MC} = \frac{CN}{NA} = \frac{AP}{PB} = k,$$

где k — заданное число больше 1, и проведены отрезки AM, BN, CP.

Вычислить площадь треугольника, образованного прямыми AM, BN, CP, если площадь S треугольника ABC известна.

18. В круглой башне, внутренний диаметр которой равен 2 м, находится винтовая лестница высотой 6 м. Высота каждой ступени составляет 0,15 м. На виде сверху соседние ступени винтовой лестницы образуют центральный угол в 18°. Внутренние края ступеней прикреплены к круглому столбу диаметром 0,64 м, ось которого совпадает с осью башни.

Найти наибольшую длину прямолинейного стержня, который можно пронести снизу наверх по такой лестнице (толщиной стержня и ступеней пренебречь).

Олимпиада 1952—1953 гг.

19. Доказать, что если n — натуральное число, то

$$(\sqrt{2}-1)^n=\sqrt{m}-\sqrt{m-1}.$$

20. Из пункта O по прямолинейному шоссе отправился в рейс автомобиль, едущий с постоянной скоростью v. Велосипедист, который находится в точке, отстоящей на расстоянии a от пункта O и на расстоянии b от шоссе, хочет передать водителю автомобиля письмо.

С какой минимальной скоростью должен ехать велосипедист, чтобы осуществить свое намерение?

21. Какому алгебраическому соотношению должны удовлетворять углы α, β и γ для того, чтобы выполнялось равенство

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma?$$

22. Доказать, что если плоская фигура имеет две и только две оси симметрии, то эти оси взаимно перпендикулярны.

23. Даны две скрещивающиеся прямые m и n. На прямой m отложен отрезок AB заданной длины a, а на прямой n — отрезок CD заданной длины b.

Доказать, что объем тетраэдра $ABCD$ не зависит от положения отрезков AB и CD на прямых m и n.

24. Найти геометрическое место центров прямоугольников, вершины которого принадлежат периметру данного треугольника.

Олимпиада 1953—1954 гг.

25. Вычислить $x^{13}+1/x^{13}$, если $x+1/x=a$, где a — заданное число.

26. Доказать, что если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — углы, заключенные между 0° и 180°, и n — произвольное натуральное число, большее 1, то

$$\sin(x_1+x_2+\ldots+x_n)<\sin x_1+\sin x_2+\ldots+\sin x_n.$$

27. Найти значения x, удовлетворяющие неравенству

$$\sqrt{x} - \sqrt{x-a} > 2,$$

где a — положительное число.

28. Однородный круглый диск подвешен в горизонтальном положении на шнурке, прикрепленном к центру диска O. В трех различных точках A, B, C на краю диска, не нарушив его равновесия, поместили грузики p_1, p_2, p_3.

Вычислить углы AOB, BOC и COA.

29. Доказать, что если в тетраэдре $ABCD$ противоположные ребра попарно равны (то есть $AB = CD$, $AC = BD$, $AD = BC$), то прямые, проходящие через середины противоположных ребер, взаимно перпендикулярны и служат осями симметрии тетраэдра.

30. По внутренней стороне обруча радиуса $2r$ катится без скольжения кружок радиуса r.

Какую линию описывает точка, произвольно выбранная на границе кружка?

Олимпиада 1954—1955 гг.

31. Представить многочлен $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ в виде разности квадратов двух многочленов неодинаковых степеней с вещественными коэффициентами.

32. Каким условиям должны удовлетворять вещественные числа a, b и c для того, чтобы уравнение

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$

имело три различных вещественных корня, образующих геометрическую прогрессию?

33. Доказать, что среди семи натуральных чисел, образующих арифметическую прогрессию с разностью 30, одно и только одно число делится на 7.

34. Внутри треугольника ABC задана точка P.

Найти на периметре треугольника ABC такую точку Q, чтобы ломаная APQ делила треугольник на две равновеликие по площади части.

35. На плоскости задана прямая m и точки A, B, лежащие по разные стороны от нее.

Найти на прямой m такую точку M, чтобы разность расстояний от нее до точек A и B была наибольшей.

36. Через точки A и B проведены скрещивающиеся прямые n и m, перпендикулярные прямой AB. На прямой m выбрана точка C, не совпадающая с точкой B, а на прямой n — точка D, не совпадающая с точкой A.

Вычислить радиус сферы, проходящей через точки A, B, C, D, если известны длины отрезков $AB = d$, $CD = l$ и угол φ между прямыми m и n.

Олимпиада 1955—1956 гг.

37. Доказать, что из отрезков длиной a, b, c треугольник можно построить в том и только том случае, если

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 > \frac{1}{2}(a^4 + b^4 + c^4). \tag{1}$$

38. Доказать, что если для некоторых чисел a, b, c

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}, \tag{1}$$

то при любом нечетном натуральном числе n

$$\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n + b^n + c^n}. \tag{2}$$

39. Доказать, что если натуральные числа a, b, c удовлетворяют соотношению

$$a^2 + b^2 = c^2, \tag{1}$$

то а) по крайней мере одно из чисел a и b делится на 3;
б) по крайней мере одно из чисел a и b делится на 4;
в) по крайней мере одно из чисел a, b, c делится на 5.

40. На прямой заданы три различные точки M, D, H.

Построить прямоугольный треугольник, у которого середина гипотенузы совпадает с точкой M, точка пересечения гипотенузы с биссектрисой прямого угла совпадает с точкой D и основание высоты, опущенной на гипотенузу, совпадает с точкой H.

41. Доказать, что любой многоугольник с периметром, равным $2a$, можно накрыть кружком диаметром a.

42. Дана сфера радиуса R и плоскость α, не имеющая со сферой общих точек. По плоскости α движется точка S — вершина конуса, касающегося сферы вдоль окружности с центром в точке C.

Найти геометрическое место точек C.

Олимпиада 1956—1957 гг.

43. Найти четырехзначное число, у которого две первые цифры, так же как и две последние, одинаковы, а само число совпадает с квадратом целого числа.

44. Доказать, что если x, y, z и $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$ — рациональные числа, то $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, $\sqrt{z}$ — также рациональные числа.

45. Доказать, что если квадратный трехчлен ax^2+bx+c принимает целые значения при любом целом значении переменного x, то $2a$, $a+b$ и c — целые числа, и наоборот.

46. Доказать, что если существует окружность, касающаяся сторон выпуклого четырехугольника (вписанная окружность), и окружность, касающаяся продолжений всех его сторон (так называемая дописанная окружность), то диагонали такого четырехугольника взаимно перпендикулярны.

47. Через середину S отрезка MN, концы которого лежат на боковых сторонах равнобедренного треугольника, проведена прямая, параллельная основанию треугольника и пересекающая боковые стороны в точках K и L.

Доказать, что ортогональная проекция отрезка MN на основание треугольника равна отрезку KL.

48. Даны отрезок AB и параллельная ему прямая m.

Пользуясь только линейкой, то есть проводя лишь прямые, разделить отрезок AB на три равные части.

Олимпиада 1957—1958 гг.

49. Доказать, что произведение трех последовательных натуральных чисел, среднее из которых совпадает с кубом натурального числа, делится на 504.

50. Доказать, что если n — натуральное число больше 1, то

$$\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{4\pi}{n}+\cos\frac{6\pi}{n}+\ \ldots\ +\cos\frac{2n\pi}{n}=0.$$

51. Доказать, что если k — натуральное число, то при любом x

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2^k})=$$
$$=1+x+x^2+x^3+\ \ldots\ +x^m,$$

где m — натуральное число, зависящее от k. Найти величину m.

52. Каждая сторона четырехугольника $ABCD$ разделена на три равные части. Через точки деления сторон AB и AD, ближайшие к вершине A, проведена прямая. Аналогичные прямые проведены и через точки деления, ближайшие к вершинам B, C, D.

Доказать, что центр тяжести четырехугольника, образованного проведенными прямыми, совпадает с центром тяжести четырехугольника $ABCD$.

53. Доказать, что в тетраэдре плоскость, делящая пополам любой из его двугранных углов, делит противолежащее ребро на отрезки, пропорциональные площадям граней, образующих данный двугранный угол.

54. Доказать, что из всех четырехугольников, описанных вокруг данной окружности, наименьшим периметром обладает квадрат.

Олимпиада 1958—1959 гг.

55. Дана числовая последовательность 13, 25, 43, ..., n-й член которой задается выражением

$$a_n=3(n^2+n)+7.$$

Доказать, что эта последовательность обладает следующими свойствами:

а) среди любых пяти последовательных ее членов ровно один делится на 5;

б) ни один член последовательности не совпадает с кубом целого числа.

56. Доказать, что для любых вещественных чисел a и b выполняется неравенство

$$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a^2+b^2}{2}\cdot\frac{a^3+b^3}{2}\leqslant\frac{a^6+b^6}{2}.$$

57. Доказать, что если квадратное уравнение

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0)$$

с целочисленными коэффициентами имеет рациональный корень, то по крайней мере одно из чисел a, b, c четно.

58. На плоскости размещено $n\geqslant 3$ отрезков так, что любые 3 из них имеют общую точку.

Доказать, что существует точка, принадлежащая всем отрезкам.

59. Из точки O, выбранной внутри равностороннего треугольника ABC, на стороны BC, CA, AB опущены перпендикуляры OM, ON, OP.

Доказать, что сумма длин отрезков AP, BM, CN не зависит от положения точки O.

60. Дана четырехугольная пирамида с вершиной S и квадратным основанием $ABCD$.

Найти кратчайший путь по поверхности пирамиды, который начинается и кончается в вершине и проходит через все вершины основания пирамиды.

Олимпиада 1959—1960 гг.

61. а) Найти необходимое и достаточное условие того, чтобы квадратные уравнения

$$\begin{cases} x^2+p_1x+q_1=0, \\ x^2+p_2x+q_2=0 \end{cases} \qquad (*)$$

имели общий корень.

б) Доказать, что если квадратные уравнения (*) имеют общий корень, но не совпадают друг с другом тождественно и p_1, q_1, p_2, q_2 — рациональные числа, то корни этих уравнений рациональны.

62. Доказать, что если n — целое число больше 4, то 2^n больше n^2.

63. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 составлены все возможные четырехзначные числа, не содержащие повторяющихся цифр.

Найти сумму этих чисел.

64. Через высоту правильного тетраэдра проведена плоскость, которая пересекает боковые грани вдоль трех прямых, образующих с плоскостью основания тетраэдра углы α, β, γ.

Доказать, что

$$\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta + \operatorname{tg}^2\gamma = 12.$$

65. На окружности выбрано 6 различных точек A, B, C, D, E, F так, что хорда AB параллельна хорде DE, а хорда DC параллельна хорде AF.

Доказать, что хорда BC параллельна хорде EF.

66. На периметре прямоугольника выбрана точка M. Найти кратчайший путь, начинающийся и заканчивающийся в точке M и имеющий общую точку с каждой из сторон прямоугольника.

Олимпиада 1960—1961 гг.

67. Доказать, что ни одно число 2^n, где n — любое натуральное число, не представимо в виде суммы двух или более последовательных натуральных чисел.

68. Доказать, что любое натуральное число, не совпадающее с целой степенью числа 2, представимо в виде суммы двух или более последовательных натуральных чисел.

69. Некто написал шесть писем шести различным людям и заготовил шесть конвертов с их адресами.

Сколькими способами можно вложить письма в конверты, чтобы ни одно письмо не попало тому лицу, которому оно адресовано?

70. Доказать, что если сечение тетраэдра плоскостью имеет форму параллелограмма, то полупериметр этого параллелограмма заключен между длинами наименьшего и наибольшего ребер тетраэдра.

71. Доказать, что если длина любой из сторон треугольника меньше 1, то площадь треугольника меньше $\sqrt{3}/4$.

72. Четыре прямые, пересекаясь в шести точках, образуют четыре треугольника.

Доказать, что описанные окружности этих треугольников имеют общую точку.

Олимпиада 1961—1962 гг.

73. Найти трехзначное число, обладающее тем свойством, что число, записанное теми же цифрами в той же последовательности, но в некоторой другой системе счисления с основанием, отличным от 10, вдвое больше исходного числа.

74. Сколькими способами множество, состоящее из n предметов, можно разделить на 2 множества?

75. Доказать, что если n — натуральное число больше 2, то

$$\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}.$$

76. Внутри данного выпуклого четырехугольника найти такую точку, чтобы отрезки прямых, соединяющие ее с серединами сторон четырехугольника, делили четырехугольник на четыре равновеликие по площади части.

77. Какому условию должны удовлетворять углы треугольника ABC для того, чтобы биссектриса угла A, медиана, проведенная из вершины B, и высота, опущенная из вершины C, пересекались в одной точке?

78. Любые две из трех заданных прямых a, b, c — скрещивающиеся.

Можно ли построить такой параллелепипед, чтобы три его ребра лежали на прямых a, b, c?

Олимпиада 1962—1963 гг.

79. Доказать, что если числа a, b, c положительны, то

$$a + b + c \leqslant \frac{a^4 + b^4 + c^4}{abc}.$$

80. Доказать, что два натуральных числа, все цифры которых — единицы, взаимно просты в том и только в том случае, если числа их знаков взаимно просты.

81. Доказать, что многочлен пятой степени

$$P(x) = x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 9x - 6$$

не представим в виде произведения двух многочленов меньших степеней с целочисленными коэффициентами.

82. Из точки S пространства выходят три луча SA, SB и SC, ни один из которых не перпендикулярен двум остальным. Через каждый луч проведена плоскость, перпендикулярная плоскости, содержащей два других луча.

Доказать, что все три проведенные плоскости пересекаются по одной прямой d.

83. В пространстве заданы четыре различные точки A, B, C, D.

Доказать, что три отрезка, соединяющие середины отрезков AB и CD, AC и BD, AD и BC, имеют общую точку, совпадающую с их серединой.

84. Из данного треугольника вырезать прямоугольник наибольшей площади.

Олимпиада 1963—1964 гг.

85. Доказать, что если три простых числа образуют арифметическую прогрессию, разность которой не делится на 6, то наименьшее из этих чисел равно 3.

86. Доказать, что неравенство

$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{\operatorname{tg} 3\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} \leqslant 3$$

не выполняется ни при каком значении α.

87. Доказать, что если $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ и $b_1 < < b_2 < \ldots < b_n$ $(n \geqslant 2)$, то

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) < < n(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n).$$

88. На плоскости выбраны 5 точек, из которых никакие 3 не лежат на одной прямой.

Доказать, что четыре из них расположены в вершинах выпуклого четырехугольника.

89. Ребра AB, BC, CD, DA тетраэдра $ABCD$ касаются некоторой сферы.

Доказать, что точки касания лежат в одной плоскости.

90. Дана пирамида $SABCD$, основание которой имеет форму выпуклого четырехугольника $ABCD$ с взаимно перпендикулярными диагоналями AC и BD. Основание перпендикуляра, опущенного из вершины S на основание пирамиды, совпадает с точкой O пересечения диагоналей AC и BD.

Доказать, что основания перпендикуляров, опущенных из точки O на боковые грани пирамиды, лежат на одной окружности.

Олимпиада 1964—1965 гг.

91. Найти все простые числа p, для которых $4p^2 + 1$ и $6p^2 + 1$ — также простые числа.

92. Доказать, что если x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px - 1 = 0$, где p — нечетное число, то при любом целом $n \geqslant 0$ числа $x_1^n + x_2^n$ и $x_1^{n+1} + x_2^{n+1}$ — целые и взаимно простые.

93. Доказать, что если целые числа a и b удовлетворяют соотношению

$$2a^2 + a = 3b^2 + b,$$

то $a - b$ и $2a + 2b + 1$ — квадраты целых чисел.

94. Доказать следующее утверждение: замкнутая пятизвенная ломаная, у которой никакие три вершины не лежат на одной прямой, может иметь одну, две, три или пять точек самопересечения, но не может иметь четыре точки самопересечения.

95. Доказать, что квадрат можно разделить на любое число квадратов больше 5, но нельзя разделить ровно на 5 квадратов.

96. На окружности выбрано $n > 2$ точек. Каждая точка соединена отрезком прямой с каждой из остальных точек.

Можно ли начертить все эти отрезки одним росчерком пера так, чтобы конец первого отрезка совпал с началом второго, конец второго отрезка — с началом третьего, конец третьего отрезка — с началом четвертого и так далее, а конец последнего отрезка совпал с началом первого?

Олимпиада 1965—1966 гг.

97. Доказать, что если два кубических многочлена с целочисленными коэффициентами имеют общий иррациональный корень, то они имеют еще один общий корень.

98. Решить в цéлых числах уравнение

$$x^4 + 4y^4 = 2(z^4 + 4u^4).$$

99. Доказать, что если неотрицательные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (n — любое натуральное число) удовлетворяют неравенству

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant \frac{1}{2},$$

то

$$(1 - x_1)(1 - x_2)\ldots(1 - x_n) \geqslant \frac{1}{2}.$$

100. Доказать, что сумма квадратов площадей ортогональных проекций граней прямоугольного параллелепипеда на одну и ту же плоскость не зависит от положения этой плоскости в том и только в том случае, если прямоугольный параллелепипед имеет форму куба.

101. Дан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$, который каждая из диагоналей AD, BE, CF делит на две равновеликие по площади части.

Доказать, что диагонали AD, BE, CF проходят через одну и ту же точку.

102. На плоскости произвольно выбраны 6 точек.

Доказать, что отношение наибольшего из отрезков, попарно соединяющих эти точки, к наименьшему больше или равно $\sqrt{3}$.

Олимпиада 1966—1967 гг.

103. Числа, образующие конечный набор $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geqslant 3)$ удовлетворяют соотношениям $a_1 = a_n = 0$ и $a_{k-1} + a_{k+1} \geqslant 2a_k$ при $k = 2, 3, \ldots, n-1$.

Доказать, что среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ нет положительных.

104. В зале находятся 100 человек, каждый из которых знаком по крайней мере с 66 из 99 остальных присутствующих.

Доказать, что может представиться случай, когда двое из любых четверых присутствующих в зале не будут знакомы друг с другом. (Мы предполагаем, что все знакомства обоюдны: если A знаком с B, то B знаком с A.)

105. На плоскости один вне другого расположены два треугольника.

Доказать, что существует прямая, проходящая через две вершины одного треугольника и отделяющая третью вершину этого треугольника от всех вершин другого треугольника (иначе говоря, третья вершина первого треугольника и весь второй треугольник лежат по разные стороны от этой прямой).

106. В зале находятся 100 человек, каждый из которых знаком по крайней мере с 67 из остальных присутствующих.

Доказать, что в зале непременно найдутся четыре человека, из которых любые два знакомы друг с другом. (Как и в задаче 104, мы предполагаем, что если A знаком с B, то B знаком с A.)

107. Точки A, B, C, D, E расположены в пространстве так, что

$$AB = BC = CD = DE = EA, \quad (1)$$

$$\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE = \angle DEA = \angle EAB. \quad (2)$$

Доказать, что точки A, B, C, D, E лежат в одной плоскости.

108. Доказать, что если многоугольник с нечетным числом сторон вписан в окружность и все его углы равны, то такой многоугольник правильный.

Олимпиада 1967—1968 гг.

109. Доказать, что многочлен относительно переменной x с целочисленными коэффициентами, принимающий при трех различных целых x значения, равные по абсолютной величине 1, не имеет целочисленных корней.

110. Доказать, что если за круглым столом сидят по крайней мере 5 человек, то их можно пересадить так, чтобы у каждого из сидящих оказались по два новых соседа.

111. Дано натуральное число $n > 2$. Построить такой набор из n попарно различных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, чтобы множество сумм

$$a_i + a_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq j)$$

содержало как можно меньше различных чисел, а также построить набор из n чисел b_1, b_2, $\ldots$, b_n, чтобы множество сумм

$$b_i + b_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq j)$$

содержало как можно больше различных чисел.

112. На плоскости выбрали $n \geqslant 3$ точек, не лежащих на одной прямой. Проведя прямые через каждые две из этих точек, получили k прямых.

Доказать, что $k \geqslant n$.

113. На плоскости расположены n точек ($n \geqslant 4$), из которых любые четыре служат вершинами выпуклого четырехугольника.

Доказать, что все эти точки совпадают с вершинами некоторого выпуклого многоугольника.

114. Дано множество $n > 3$ точек на плоскости, из которых никакие три не лежат на одной прямой, и натуральное число $k < n$.

Доказать следующие утверждения:

1) если $k \leqslant n/2$, то каждую точку заданного множества можно соединить отрезками прямых по крайней мере с k другими точками множества так, что среди проведенных отрезков прямых не будет трех сторон одного и того же треугольника;

2) если $k > n/2$ и каждая точка заданного множества соединена отрезками прямых с k другими точками множества, то среди проведенных отрезков прямых найдутся три стороны одного и того же треугольника.

Олимпиада 1968—1969 гг.

115. Доказать, что если вещественные числа a, b, c удовлетворяют условию

$$\frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} = 0, \qquad (1)$$

где m — положительное число, то уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (2)$$

имеет корень, заключенный между 0 и 1.

116. Даны попарно различные вещественные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Найти наименьшее значение функции, определенной для $x \in \mathbb{R}$ выражением

$$y = |x - a_1| + |x - a_2| + \ldots + |x - a_n|.$$

117. Доказать, что если натуральные числа a, b, p, q, r, s удовлетворяют условиям

$$qr - ps = 1, \qquad (1)$$

$$\frac{p}{q} < \frac{a}{b} < \frac{r}{s}, \qquad (2)$$

то

$$b \geqslant q + s.$$

118. Доказать, что если некоторая фигура имеет в пространстве ровно n осей симметрии, то число n нечетно.

119. Доказать, что восьмиугольник, все углы которого равны, а длины сторон выражаются рациональными числами, обладает центром симметрии.

120. При каких значениях n существует многогранник, имеющий n ребер?

Олимпиада 1969—1970 гг.

121. Диаметр AB делит окружность на две полуокружности. На одной полуокружности n точек P_1, P_2, ..., P_n выбраны так, что точка P_1 лежит между A и P_2, точка P_2 лежит между P_1 и P_3, ..., точка P_n лежит между P_{n-1} и B.

Как следует выбрать точку C на другой полуокружности, чтобы сумма площадей треугольников CP_1P_2, CP_2P_3, CP_3P_4, ..., $CP_{n-1}P_n$ была наибольшей?

122. Даны три бесконечные последовательности

$$a_1, a_2, \ldots,$$
$$b_1, b_2, \ldots,$$
$$c_1, c_2, \ldots,$$

элементами которых служат натуральные числа, причем при $i \neq j$

$$a_i \neq a_j, \quad b_i \neq b_j, \quad c_i \neq c_j.$$

Доказать, что существуют два индекса k, l, для которых справедливы неравенства $k < l$ и $a_k \leq a_l$, $b_k \leq b_l$, $c_k \leq c_l$.

123. Доказать, что $n > 1$ — простое число в том и только в том случае, если для каждого натурального k, удовлетворяющего неравенству $1 \leqslant k \leqslant n-1$, биномиальный коэффициент

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

делится на n.

124. На плоскости выбраны n прямоугольников со сторонами, параллельными двум заданным взаимно перпендикулярным прямым.

Доказать, что если любые два из выбранных прямоугольников имеют по крайней мере одну общую точку, то существует точка, принадлежащая всем прямоугольникам.

125. Сколькими способами множество, содержащее 12 элементов, можно разбить на 6 множеств, каждое из которых содержит по 2 элемента?

126. Найти наименьшее действительное число A, такое, что для каждого квадратного трехчлена $f(x)$, удовлетворяющего условию

$$|f(x)| \leqslant 1 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

выполняется неравенство $f'(0) \leqslant A$.

Олимпиада 1970—1971 гг.

127. Доказать, что если $\{a_n\}$ — бесконечная последовательность попарно различных натуральных чисел, десятичная запись которых не содержит цифры 0, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} < 29.$$

128. Биллиардный стол имеет форму треугольника с рациональными отношениями внутренних углов. По шару, находившемуся в некоторой внутренней точке стола, нанесли удар кием. Шар отражается от бортов по закону «угол падения равен углу отражения».

Доказать, что шар может двигаться лишь вдоль конечного числа направлений. (Предполагается, что шар не попадает в вершины треугольника.)

129. Доступ к сейфу имеют 11 членов комиссии.

Каким наименьшим числом замков следует снабдить сейф для того, чтобы при определенном наборе ключей любые 6 членов комиссии, собравшись вместе, могли его открыть, а любых 5 членов комиссии было бы недостаточно? Указать, каким образом следует распределить ключи от сейфа с минимальным числом замков между членами комиссии.

130. Доказать, что если натуральные числа x, y, z удовлетворяют уравнению

$$x^n + y^n = z^n,$$

то $\min(x, y) \geqslant n$.

131. Найти наибольшее целое число A, такое, что для любой перестановки натуральных чисел, не превышающих 100, сумма некоторых 10 последовательных чисел больше или равна A.

132. Дан правильный тетраэдр с ребрами единичной длины.

Доказать следующие утверждения:

1) на поверхности S тетраэдра существуют четыре точки, такие, что расстояние от любой точки поверхности S до одной из этих четырех точек не превосходит $^1/_2$;

2) на поверхности S тетраэдра не существует трех точек, обладающих тем же свойством.

Под расстоянием между двумя точками, лежащими на поверхности S, мы понимаем нижнюю грань длин ломаных, проходящих по поверхности S и соединяющих рассматриваемые точки.

Олимпиада 1971—1972 гг.

133. Многочлены $u_i(x) = a_i x + b_i$ (a_i, b_i — вещественные числа; $i = 1, 2, 3$) удовлетворяют при некотором натуральном $n \geqslant 2$ соотношению

$$u_1(x)^n + u_2(x)^n = u_3(x)^n. \qquad (1)$$

Доказать, что эти многочлены представимы в виде $u_i(x) = c_i(Ax + B)$, где $i = 1, 2, 3$ и A, B, c_1, c_2, c_3 — вещественные числа.

134. На плоскости заданы $n > 2$ точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой.

Доказать, что среди замкнутых ломаных, проходящих через заданные точки, наименьшую длину имеет простая замкнутая ломаная.

135. Доказать, что существует такой многочлен $P(x)$ с целочисленными коэффициентами, для которого при всех значениях x из интервала $[^1/_{10}, ^9/_{10}]$ выполняется неравенство $|P(x) - ^1/_2| < ^1/_{1000}$.

136. На прямой, не имеющей общих точек со сферой K, заданы точки A и B. Основание P перпендикуляра, опущенного из центра сферы K на прямую AB, находится между точками A и B, причем отрезки AP и BP больше радиуса сферы. Рассмотрим множество Z треугольников ABC, стороны которых AC и BC касаются сферы K.

Доказать, что треугольник T обладает наибольшим из всех треугольников множества Z периметром в том и только в том случае, если он обладает наибольшей (по сравнению с другими треугольниками из множества Z) площадью.

137. Доказать, что все подмножества конечного множества можно расположить в таком порядке, при котором любые два соседних множества отличаются одним элементом.

138. Доказать, что при n, стремящемся к бесконечности, сумма цифр числа 1972^n неограниченно возрастает.

Олимпиада 1972—1973 гг.

139. Доказать, что любой многочлен можно представить в виде разности двух монотонно возрастающих многочленов.

140. Пусть p_n — вероятность того, что в последовательности n бросаний монета 100 раз подряд выпадет орлом вверх.

Доказать, что последовательность чисел p_n сходится, и вычислить ее предел.

141. Многогранник W обладает следующими свойствами:

а) у него имеется центр симметрии;

б) сечение многогранника W плоскостью, проходящей через центр симметрии и любое ребро, имеет вид параллелограмма;

в) существует вершина многогранника W, принадлежащая ровно трем ребрам.

Доказать, что W — параллелепипед.

142. На прямой задана система отрезков, общая длина которых меньше 1.

Доказать, что любое множество, состоящее из n принадлежащих прямой точек, можно сдвинуть вдоль прямой на вектор, длина которого не превышает $n/2$, так, чтобы ни одна из сдвинутых точек не принадлежала ни одному из заданных отрезков.

143. Доказать, что любую положительную правильную дробь m/n можно представить в виде суммы величин, обратных попарно различным натуральным числам.

144. Доказать, что для любого многоугольника, обладающего центром симметрии, существует не более одного эллипса наименьшей площади, содержащего данный многоугольник.

Олимпиада 1973—1974 гг.

145. В тетраэдре $ABCD$ ребро AB перпендикулярно ребру CD и $\angle ACB = \angle ADB$.

Доказать, что плоскость, определяемая ребром AB и серединой ребра CD, перпендикулярна ребру CD.

146. Лососям, плывущим по горной реке, необходимо преодолеть два водопада. Вероятность того, что лосось преодолеет в данной попытке первый водопад, составляет $p > 0$, вероятность того, что лосось преодолеет в данной попытке второй водопад, составляет $q > 0$. Предполагается, что попытки преодолеть водопады независимы.

Вычислить вероятность того, что лосось за n попыток не преодолеет первый водопад, при условии, что за n попыток он не преодолеет оба водопада.

147. Пусть r — натуральное число.

Доказать, что квадратный трехчлен $x^2 - rx - 1$ не является делителем ни одного многочлена $p(x) \neq 0$ с целочисленными коэффициентами, которые по абсолютной величине меньше r.

148. Доказать, что для любого натурального числа n и последовательности вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ существует натуральное число k, для которого выполняется неравенство

$$\left| \sum_{i=1}^{k} a_i - \sum_{i=k+1}^{n} a_i \right| \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |a_i|.$$

149. Доказать, что если натуральные числа n, r удовлетворяют неравенству $r + 3 \leqslant n$, то биномиальные коэффициенты $\binom{n}{r}$, $\binom{n}{r+1}$, $\binom{n}{r+2}$, $\binom{n}{r+3}$ не являются последовательными членами ни одной арифметической прогрессии.

150. Выпуклый n-угольник разделен диагоналями на треугольники так, что:

1) из каждой вершины выходит четное число диагоналей;

2) никакие две диагонали не имеют внутренних общих точек.

Доказать, что число n делится на 3.

Олимпиада 1974—1975 гг.

151. Последовательность вещественных чисел $\{a_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ обладает следующим свойством: существует натуральное число n, такое, что

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 0$$

и

$$a_{n+k} = a_k \quad \text{при} \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Доказать, что существует натуральное N, для которого при $k = 0, 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство

$$\sum_{i=N}^{N+k} a_i \geqslant 0.$$

152. На поверхности правильного тетраэдра с длиной ребер 1 выбрано конечное множество отрезков так, что любые две вершины тетраэдра можно соединить ломаной, состоящей из принадлежащих множеству отрезков.

Можно ли выбрать это множество отрезков так, чтобы их общая длина была меньше $1+\sqrt{3}$?

153. Найти наименьшее положительное число α, для которого существует такое положительное число β, чтобы для $0 \leqslant x \leqslant 1$ выполнялось неравенство

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x} \leqslant 2-\frac{x^{\alpha}}{\beta}.$$

Для найденного значения α определить наименьшее положительное число β, удовлетворяющее этому неравенству.

154. В десятичной записи некоторого натурального числа встречаются цифры 1, 3, 7 и 9.

Доказать, что, переставив цифры, можно получить десятичную запись числа, делящегося на 7.

155. Доказать, что вокруг треугольника, один из внутренних углов которого равен α, окружность радиусом R можно описать, а окружность радиусом r можно вписать в него в том и только в том случае, если

$$\frac{2R}{r} \geqslant \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

156. На отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$ заданы функции $S(x) = 1-x$, $T(x) = {}^1/_2 x$. Существует ли функция вида

$$f = g_1 \circ g_2 \circ \ldots \circ g_n,$$

где n — некоторое натуральное число, а «множители» g_k при $k = 1, 2, \ldots, n$ равны либо $S(x)$, либо $T(x)$, такая, что

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1975}{2^{1975}}\,?$$

Олимпиада 1975—1976 гг.

157. Выяснить, рационально ли число

$$\sin\frac{\pi}{18}\sin\frac{3\pi}{18}\sin\frac{5\pi}{18}\sin\frac{7\pi}{18}\sin\frac{9\pi}{18}?$$

158. Даны такие четыре последовательности вещественных чисел $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$, что при любом n

$$a_{n+1}=a_n+b_n,\ b_{n+1}=b_n+c_n,$$
$$c_{n+1}=c_n+d_n,\ d_{n+1}=d_n+a_n.$$

Доказать, что если при некоторых $k\geqslant 1$, $m\geqslant 1$ выполняются соотношения $a_{k+m}=a_m$, $b_{k+m}=b_m$, $c_{k+m}=c_m$, $d_{k+m}=d_m$, то $a_2=b_2=c_2=d_2=0$.

159. Доказать, что для любого тетраэдра произведения длин противоположных ребер могут быть длинами сторон некоторого треугольника.

160. Диагонали некоторого плоского четырехугольника, последовательные стороны которого имеют длины a, b, c, d, перпендикулярны.

Доказать, что диагонали любого другого плоского четырехугольника, последовательные стороны которого имеют те же длины a, b, c, d, также перпендикулярны.

161. Некое судно занимается ловлей рыбы в территориальных водах иностранного государства, не имея на то соответствующего разрешения. Каждый заброс сетей приносит нарушителям улов одной и той же постоянной стоимости. Вероятность задержания судна пограничной охраной при очередном забросе сетей равна $1/k$, где k — некоторое фиксированное натуральное число. Предполагается, что событие, состоящее в задержании или незадержании судна при очередном забросе сетей, не зависит от предшествующего хода лова. При задержании судна пограничной охраной вся пойманная ранее рыба конфискуется и дальнейший лов становится невозможным. Капитан намеревается уйти из территориальных вод после n-го заброса сетей. Поскольку возможность задержания судна пограничной охраной отнюдь не исключена, прибыль от лова рыбы представляет собой случайную величину.

Найти число n, при котором ожидаемая величина прибыли максимальна.

162. Возрастающая функция f, заданная на множестве натуральных чисел, обладает тем свойством, что для любой пары натуральных чисел (k, l)

$$f(k \cdot l) = f(k) + f(l).$$

Доказать, что существует такое вещественное число $p > 1$, для которого при $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$f_n = \log_p n.$$

РЕШЕНИЯ

1. Предположим, что утверждение задачи неверно, то есть для некоторых чисел a, b, c, удовлетворяющих условиям $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $abc = 1$, выполняется неравенство

$$a + b + c < 3.$$

Умножая обе части этого неравенства на ab, получаем

$$a^2b + ab^2 + abc < 3ab$$

или

$$ab^2 + (a^2 - 3a)\,b + 1 < 0.$$

Последнее неравенство означает, что квадратичная функция

$$y = ax^2 + (a^2 - 3a)\,x + 1$$

в точке $x = b$ принимает отрицательное значение. Поскольку эта функция положительна при достаточно большом по абсолютной величине значении x, то она имеет два вещественных корня. Следовательно, ее дискриминант положителен:

$$(a^2 - 3a)^2 - 4a > 0,$$

откуда

$$a^3 - 6a^2 + 9a - 4 > 0$$

или

$$(a - 1)^2\,(a - 4) > 0.$$

Таким образом, $a > 4$ и тем более $a + b + c > 4$.

Последнее неравенство противоречит исходному предположению о том, что $a + b + c < 3$. Следовательно, все

положительные числа a, b, c, произведение которых равно 1, удовлетворяют неравенству

$$a+b+c\geqslant 3.$$

2. Запишем уравнение, приведенное в условиях задачи, в виде

$$(y-x)(y^2+xy+x^2)=13\cdot 7. \qquad (*)$$

Трехчлен y^2+xy+x^2 при всех x, y принимает неотрицательные значения, поскольку

$$y^2+xy+x^2=\left(y+\frac{1}{2}x\right)^2+\frac{3}{4}x^2\geqslant 0.$$

Следовательно, если целые числа x и y удовлетворяют уравнению $(*)$, то оба множителя в его левой части принимают положительные целочисленные значения. Поскольку правая часть уравнения $(*)$ делится на 7 и на 13, то и его левая часть должна делиться на 7 и на 13. А поскольку 7 и 13 — простые числа, то это возможно лишь в следующих случаях.

1) Число $y-x$ делится на 13 и на 7, и в уравнении $(*)$ следует положить

$$y-x=91, \quad y^2+xy+x^2=1.$$

Эта система уравнений не имеет решений в вещественных, а тем более в целых числах.

2) Число y^2+xy+x^2 делится на 13 и на 7, и в уравнении $(*)$ следует положить

$$y-x=1, \quad y^2+xy+x^2=91.$$

Эта система уравнений допускает решения:

$$x=5, \quad y=6; \quad x=-6, \quad y=-5.$$

3) Число $y-x$ делится на 13, а число y^2+xy+x^2 делится на 7. При таком предположении мы приходим к системе уравнений:

$$y-x=13, \quad y^2+xy+x^2=7.$$

Эта система уравнений не имеет решений в вещественных числах.

4) Число $y-x$ делится на 7, а число y^2+xy+x^2 делится на 13. Тогда

$$y-x=7, \quad y^2+xy+x^2=13$$

Решая эту систему уравнений, находим

$$x=-3, \quad y=4; \quad x=-4, \quad y=3.$$

Таким образом, уравнение (*) допускает следующие решения в целых числах:

$$x=5, \quad y=6; \quad x=-6, \quad y=-5; \quad x=-3, \quad y=4;$$
$$x=-4, \quad y=3.$$

3. Поскольку число n не простое, то существуют натуральные числа p и q, такие, что $1<p<n$, $1<q<n$ и $n=p\cdot q$ (например, в качестве множителя p можно взять наибольший простой делитель числа n).

Рассмотрим в отдельности два случая.

Случай 1: $p \neq q$. В этом случае p и q — два различных члена последовательности $1, 2, \ldots, n-1$. Следовательно, произведение $1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-1)$ делится на $n=p\cdot q$.

Случай 2: $p=q$. Тогда $n=p^2$, а поскольку $n>4$, то $p^2>4$. Но $p>2$, $p^2>2p$ и, таким образом, $2p<n$. Числа p и $2p$ — два различных члена последовательности $1, 2, \ldots, n-1$. Следовательно, произведение $1\cdot 2\cdot \ldots$ $\ldots \cdot (n-1)$ делится на $p\cdot 2p=2n$, а значит и на n.

Примечание. Можно доказать более сильное утверждение, а именно доказать, что произведение $1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-3)$ делится на n. Для этого прежде всего заметим, что в соотношении $n=p\cdot q$, где p и q — натуральные числа больше 1, ни одно из чисел p и q не может превосходить число $n-3$.

Действительно, если бы, например, выполнялось неравенство $p>n-3$, то, поскольку $q \geqslant 2$, мы получили бы, что $p\cdot q>2(n-3)$ и, следовательно, $n>2n-6$ и $n<6$. Но последнее неравенство невозможно, поскольку по предположению $n>4$ и $n\neq 5$.

Как и прежде, рассмотрим в отдельности два случая.

Случай 1: $p\neq q$. Поскольку $p \leqslant n-3$, $q \leqslant n-3$, то p и q — два различных члена последовательности натуральных чисел $1, 2, \ldots, n-3$. Следовательно, произведение $1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-3)$ делится на $n=p\cdot q$.

Случай 2: $p=q$. В этом случае $n=p^2$. Поскольку $n>4$, то $p>2$ и, следовательно, $p \geqslant 3$. Отсюда мы получаем, что $p^2 \geqslant 3p$, $n \geqslant 2p+p$, $n \geqslant 2p+3$ и, наконец $2p \leqslant n-3$. Таким образом, p и $2p$ — два различных члена последовательности натуральных чисел $1, 2, \ldots, n-3$. Следовательно, произведение $1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-3)$ делится на $p\cdot 2p=2n$, а значит, и на n.

Заметим также, что произведение $1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-4)$ не делится на n при $n=6$ и $n=9$.

4. Пусть P, Q, R — основания перпендикуляров, опущенных из точки M на прямые BC, CA, AB.

Если точка M совпадает с одной из точек A, B, C, то с той же точкой совпадают и две из точек P, Q, R. Ясно, что в этом случае утверждение задачи верно.

Пусть точка M лежит внутри одного из вписанных в окружность углов с вершинами в точках A, B, C, например внутри угла BAC. Четырехугольник $ABMC$ вписан в окружность, и поэтому $\angle ABM + \angle ACM = 180°$.

Если углы ABM и ACM прямые, то утверждение задачи верно, поскольку в этом случае точка R совпадает с точкой B, а точка Q — с точкой C, в силу чего точки P, Q, R лежат на прямой BC.

Остается рассмотреть случай, когда один из углов, например $\angle ABM$, тупой, а другой ($\angle ACM$) острый. Точка R в этом случае лежит на продолжении отрезка AB за точку B, точка Q может лежать либо на отрезке CA, либо на продолжении отрезка CA за точку A. Рассмотрим каждую из этих возможностей в отдельности.

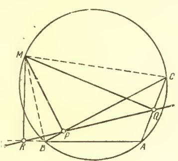


Рис. 1.

а) Пусть точка Q лежит на отрезке AC (рис. 1). Тогда точка P лежит на отрезке BC. Это следует из того, что в треугольнике BMC углы при вершинах B и C острые. Действительно, $\angle MBC = \angle MAC$, поскольку оба угла вписанные и опираются на одну и ту же дугу окружности, а $\angle MAC$ — острый угол прямоугольного треугольника MAQ. Угол MCB острый как часть острого угла ACM. Следовательно, основание P высоты треугольника BMC, опущенной из вершины M, лежит на стороне BC, противолежащей вершине M.

Чтобы доказать, что точки P, Q, R лежат на одной прямой, достаточно доказать равенство углов RPB и QPC.

Точки M, B, P, R лежат на одной окружности, поскольку углы MRB и MPB прямые, при этом точки P и M расположены по одну сторону от прямой RB, в силу чего $\angle RPB = \angle RMB$.

Аналогично точки M, P, Q, C лежат на одной окружности, поскольку углы MPC и MQC прямые, при этом точки P и M расположены по одну сторону от прямой QC, поэтому $\angle QPC = \angle QMC$.

Но углы RMB и QMC равны, поскольку

$$\angle RMB = 90° - \angle MBR = 90° - (180° - \angle MBA) = \angle MBA - 90°,$$

$$\angle QMC = 90° - \angle MCQ = 90° - \angle MCA = 90° - (180° - \angle MBA) = \angle MBA - 90°.$$

Итак, $\angle RPB = \angle QPC$ и точки P, Q, R лежат на одной прямой.

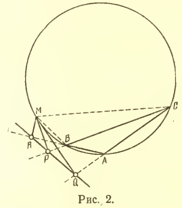


Рис. 2.

б) Пусть точка Q лежит на продолжении отрезка CA (рис. 2). В этом случае точка P лежит на продолжении отрезка CB за точку B, поскольку угол MBC тупой. Это следует из того, что $\angle MBC = \angle MAC$, а угол MAC тупой как прилегающий к острому углу MAQ. Принадлежность точек P, Q, R одной прямой мы докажем,

убедившись в том, что углы RPB и QPC в сумме дают развернутый угол.

Действительно, рассуждения, аналогичные тем, которые были проведены в случае (а), позволяют утверждать, что $\angle RPB = 180° - \angle RMB$, поскольку точки M, R, P, B лежат на одной окружности, причем точки M и P расположены по разные стороны от прямой RB. Затем можно доказать, что $\angle QPC = \angle QMC$ и, наконец, что $\angle RMB = \angle QMC$.

Таким образом, $\angle RPB = 180° - \angle QPC$, откуда следует, что точки P, Q, R лежат на одной прямой. Эта прямая называется прямой Симсона[1] треугольника ABC относительно точки M.

5. Пусть AM и BN — высоты тетраэдра $ABCD$ (рис. 3), пересекающиеся в точке S; высота AS перпендикулярна плоскости BCD, высота BS перпендикулярна плоскости ACD.

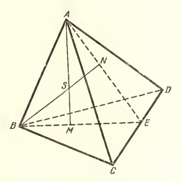


Рис. 3.

Плоскость ABS, проходящая через прямые AS и BS, перпендикулярные плоскостям BCD и ACD, перпендикулярна этим плоскостям и, следовательно, линии их пересечения, то есть прямой CD.

Следовательно, прямая CD перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости ABS, и в частности $CD \perp AB$.

[1] Роберт Симсон (1687—1768) — шотландский математик.

Отсюда мы заключаем, что через прямую CD можно провести плоскость, перпендикулярную прямой AB. Действительно, если CP — высота треугольника ABC (рис. 4), то, поскольку $CP \perp AP$, $CD \perp AB$, плоскость CDP перпендикулярна прямой AB.

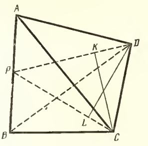


Рис. 4

Следовательно, высоты $CK \perp PD$ и $DL \perp PL$ треугольника CDP служат одновременно высотами тетраэдра.

Действительно, $CK \perp AB$ (поскольку прямая CK лежит в плоскости CDP) и $CK \perp PD$, в силу чего прямая CK перпендикулярна плоскости ABD. Аналогичным образом заключаем, что прямая DL перпендикулярна плоскости ABC.

Высоты CK и DL тетраэдра как высоты треугольника пересекаются, что и требовалось доказать.

Примечание. На рис. 3 и 4 изображен случай, когда двугранные углы тетраэдра при ребрах AB и CD острые. Приведенные выше рассуждения не зависят от этого частного предположения.

6. Открутить гайку можно в том и только в том случае, если выполняются следующие два условия:

1) гайка (квадрат Q) входит в отверстие (правильный шестиугольник S) ключа;

2) при повороте ключ «захватывает» гайку, что происходит, если наибольшее расстояние между двумя точками гайки, то есть длина диагонали квадрата Q, больше «наименьшей ширины» отверстия ключа, то есть расстояния между противоположными сторонами шестиугольника S.

Эти условия необходимо представить в виде зависимостей между a и b.

Пусть b_0 — сторона наибольшего квадрата, который можно поместить в шестиугольник S.

Тогда условие (1) можно записать в виде неравенства

$$b \leqslant b_0,$$

а условие (2) — в виде неравенства

$$b\sqrt{2} > a\sqrt{3}, \quad \text{или} \quad b > a\sqrt{\frac{3}{2}},$$

поскольку расстояние между противоположными сторонами правильного шестиугольника со стороной a равно $a\sqrt{3}$.

Объединяя оба неравенства, получаем условие

$$a\sqrt{\frac{3}{2}} < b \leqslant b_0. \qquad (*)$$

Необходимо вычислить величину b_0 в зависимости от a.

Для этого докажем, что наибольший квадрат, помещающийся в шестиугольнике S, равен квадрату $ABCD$ (рис. 5), стороны которого соответственно параллельны

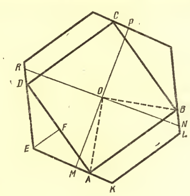


Рис. 5.

двум осям симметрии шестиугольника S, а вершины лежат на сторонах шестиугольника.

Пусть Q — произвольный квадрат, помещающийся в шестиугольнике S. Требуется доказать, что квадрат Q не больше квадрата $ABCD$.

Возможны следующие два случая.

Случай 1. Центр квадрата Q совпадает с центром O шестиугольника. Диагонали квадрата Q лежат на взаимно перпендикулярных прямых MP и NR, делящих шестиугольник на 4 части. Некоторые из этих частей содержат целиком стороны шестиугольника S, поскольку прямые MP и NR могут пересекать не более четырех из шести его сторон.

Пусть, например, угол MON содержит сторону KL шестиугольника S. Не ограничивая общности, можно предположить, что сторона AB квадрата $ABCD$ параллельна (как на рис. 5) стороне KL шестиугольника (в противном случае квадрат $ABCD$ можно повернуть на соответствующий угол). В этом случае отрезки OM, ON либо совпадают с отрезками OA, OB и тогда $OM = OA$, либо один из отрезков, например OM, лежит (как на рис. 5) вне угла AOB и тогда $OM < OA$. В обоих случаях $OM \leqslant OA$.

Кроме того, диагональ квадрата Q не больше отрезка $PM = 2OM$. По доказанному выше $PM \leqslant 2OA$, или $PM \leqslant AC$. Следовательно, квадрат Q не больше квадрата $ABCD$.

Случай 2. Центр квадрата Q находится в точке T, не совпадающей с центром O шестиугольника S (рис. 6).

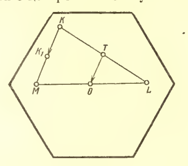


Рис. 6.

Подвергнув квадрат Q параллельному переносу на вектор $\overrightarrow{TO}$, получим квадрат Q_1, равный квадрату Q, с центром в точке O. Нетрудно доказать, что квадрат Q_1 лежит в шестиугольнике S. Действительно, пусть K — произвольная точка квадрата Q, L — точка, симметричная

точке K относительно центра T, а M — точка, симметричная точке L относительно центра O (рис. 6). Точка L принадлежит квадрату Q и, следовательно, шестиугольнику S, в силу чего точка M также принадлежит шестиугольнику S. Поскольку шестиугольник S — выпуклая фигура, то середина K_1 отрезка KM, соединяющего две точки шестиугольника S, также принадлежит шестиугольнику S. Но $\overrightarrow{KK_1} = \overrightarrow{TO}$. Следовательно, точка K_1 — образ точки K при произведенном нами параллельном переносе. Таким образом, образ Q_1 квадрата Q принадлежит шестиугольнику S, а поскольку, как доказано выше, квадрат Q_1 не больше квадрата $ABCD$, то и квадрат Q также не больше квадрата $ABCD$, что и требовалось доказать.

Из доказанного выше следует, что длина отрезка b_0 в неравенстве (*) равна длине стороны квадрата $ABCD$. Величину стороны квадрата можно вычислить, например, из прямоугольного треугольника DEF (рис. 5), у которого больший катет DF равен $\frac{1}{2}b_0$, меньший катет EF равен $a - \frac{1}{2}b_0$, а $\angle DEF = 60°$.

Поскольку

$$\frac{1}{2}b_0 = \left(a - \frac{1}{2}b_0\right)\sqrt{3},$$

то

$$b_0 = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}, \quad \text{или} \quad b_0 = (3 - \sqrt{3})\,a.$$

Итак, ответ на вопрос задачи гласит: гайку можно открутить ключом в том и только в том случае, если a и b удовлетворяют условию

$$\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}} < b \leqslant (3 - \sqrt{3})\,a.$$

7. Пусть x_1, x_2 — корни квадратного трехчлена $x^2 + mx + n$, а x_3, x_4 — корни квадратного трехчлена $x^2 + px + q$.

Предположим, что пары корней разделяют друг друга, то есть x_1, x_2, x_3, x_4 — вещественные числа, и одно из чисел x_3, x_4 лежит внутри интервала (x_1, x_2), а другое — вне этого интервала.

Тогда возможен один из двух случаев: либо разности $x_3 - x_1$, $x_3 - x_2$ имеют одинаковые знаки, а разности $x_4 - x_1$, $x_4 - x_2$ имеют противоположные знаки, либо наоборот. В обоих случаях

$$(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_1)(x_4 - x_2) < 0. \qquad (1)$$

Поскольку $x_1 + x_2 = -m$, $x_1 x_2 = n$, то

$$(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) = x_3^2 - (x_1 + x_2) x_3 + x_1 x_2 = x_3^2 + m x_3 + n,$$
$$(x_4 - x_1)(x_4 - x_2) = x_4^2 - (x_1 + x_2) x_4 + x_1 x_2 = x_4^2 + m x_4 + n$$

и неравенство (1) можно преобразовать к виду

$$(x_3^2 + m x_3 + n)(x_4^2 + m x_4 + n) < 0. \qquad (2)$$

Раскрывая скобки в левой части неравенства (2) и учитывая, что

$$x_3 + x_4 = -p, \quad x_3 x_4 = q \quad \text{и} \quad x_3^2 + x_4^2 = (x_3 + x_4)^2 - 2x_3 x_4 = p^2 - 2q,$$

получаем

$$(x_3^2 + m x_3 + n)(x_4^2 + m x_4 + n) = x_3^2 x_4^2 + m x_3 x_4 (x_3 + x_4) + m^2 x_3 x_4 + n (x_3^2 + x_4^2) + mn (x_3 + x_4) + n^2 =$$
$$= q^2 - mpq + m^2 q + n (p^2 - 2q) - mnp + n^2 =$$
$$= (n - q)^2 + mq (m - p) + np (p - m) =$$
$$= (n - q)^2 + (m - p)(mq - np).$$

Таким образом, неравенство (2) мы преобразовали к виду

$$(n - q)^2 + (m - p)(mq - np) < 0. \qquad (3)$$

Итак, мы доказали утверждение: *если корни квадратных трехчленов $x^2 + mx + n$ и $x^2 + px + q$ разделяют друг друга, то коэффициенты этих квадратных трехчленов удовлетворяют условию* (3).

Докажем теперь, что справедливо и обратное утверждение: *если выполнено условие* (3), *то квадратные трехчлены $x^2 + mx + n$ и $x^2 + px + q$ имеют вещественные корни, причем корни одного трехчлена разделяют корни другого трехчлена.*

Доказательство. Подставив в неравенство (3) выражения $p = -(x_3 + x_4)$, $q = x_3 x_4$, получим

неравенство (2), которое можно представить в виде

$$f(x_3)\, f(x_4) < 0, \tag{4}$$

где $f(x) = x^2 + mx + n$.

Предположим, что x_3 и x_4 — невещественные числа. Из алгебры известно, что если корни квадратного трехчлена с вещественными коэффициентами не вещественны, то они комплексно сопряжены, то есть

$$x_3 = \alpha + i\beta, \quad x_4 = \alpha - i\beta,$$

где α и β — вещественные числа, а i обозначает мнимую единицу ($i^2 = -1$).

Подставив вместо x числа x_3 и x_4, вычислим значения функции $f(x)$:

$$f(x_3) = (\alpha + i\beta)^2 + m(\alpha + i\beta) + n =$$
$$= (\alpha^2 - \beta^2 + m\alpha + n) + i(2\alpha\beta + m\beta),$$
$$f(x_4) = (\alpha - i\beta)^2 + m(\alpha - i\beta) + n =$$
$$= (\alpha^2 - \beta^2 + m\alpha + n) - i(2\alpha\beta + m\beta).$$

Мы видим, что если x_3 и x_4 — комплексно сопряженные числа, то значения $f(x_3)$ и $f(x_4)$ — также комплексно сопряженные числа. Произведение комплексно сопряженных чисел — вещественное неотрицательное число, поэтому

$$f(x_3)\, f(x_4) \geqslant 0. \tag{5}$$

Итак, предположение о том, что корни x_3 и x_4 не вещественны, приводит к неравенству (5), противоречащему неравенству (4). Следовательно, x_3 и x_4 — вещественные числа, и из неравенства (4) заключаем, что $f(x_3)$ и $f(x_4)$ — также вещественные числа противоположных знаков. Но тогда квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + mx + n$ имеет вещественные корни x_1 и x_2, один из которых заключен между числами x_3 и x_4, а другой лежит вне интервала (x_3, x_4), что и требовалось доказать.

8. Обозначив цифры, которые требуется найти, через x и y, запишем число $30x0y03$ в виде

$$N = 3 \cdot 10^6 + x \cdot 10^4 + y \cdot 10^2 + 3,$$

Нам необходимо найти такие целые числа x и y, чтобы число N делилось на 13 и выполнялись неравенства

$$0 \leqslant x \leqslant 9, \quad 0 \leqslant y \leqslant 9.$$

Числа 10^6, 10^4, 10^2 дают при делении на 13 остатки 1, 3, 9, поэтому

$$3 \cdot 10^6 = 13k_1 + 3,$$
$$x \cdot 10^4 = 13k_2 + 3x,$$
$$y \cdot 10^2 = 13k_3 + 9y,$$

где k_1, k_2, k_3 — натуральные числа. Следовательно, число N можно представить в виде

$$N = 13k + 3 + 3x + 9y + 3,$$

или

$$N = 13k + 3(x + 3y + 2),$$

где k — натуральное число.

Число N делится на 13 в том и только в том случае, если число $x + 3y + 2$ делится на 13, то есть если x и y удовлетворяют соотношению

$$x + 3y + 2 = 13m,$$

где m — натуральное число.

Из неравенства $x \leqslant 9$, $y \leqslant 9$ следует, что

$$x + 3y + 2 \leqslant 9 + 3 \cdot 9 + 2, \quad \text{или} \quad x + 3y + 2 \leqslant 38,$$

поэтому число m должно удовлетворять неравенству $13m \leqslant 38$, то есть может принимать только значения 1 или 2:

1) выбрав $m = 1$, получим для x и y уравнение

$$x + 3y + 2 = 13, \quad \text{или} \quad x = 11 - 3y.$$

При ограничениях $0 \leqslant x \leqslant 9$, $0 \leqslant y \leqslant 9$ это уравнение имеет три решения в целых числах:

$$y = 1, \quad x = 8; \quad y = 2, \quad x = 5; \quad y = 3, \quad x = 2;$$

2) при $m = 2$ получаем уравнение

$$x + 3y + 2 = 26, \quad \text{или} \quad x = 3(8 - y),$$

допускающее следующие решения в целых числах:

$$y = 5, \quad x = 9; \quad y = 6, \quad x = 6; \quad y = 7, \quad x = 3;$$
$$y = 8, \quad x = 0.$$

Таким образом, исходная задача имеет 7 решений, которым соответствуют числа 3080103, 3050203, 3020303, 3090503, 3060603, 3030703, 3000803.

9. Разделив обе части равенства $1 = a + b + c$ по очереди на a, b, c, получим

$$\frac{1}{a} = 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a},$$
$$\frac{1}{b} = \frac{a}{b} + 1 + \frac{c}{b},$$
$$\frac{1}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + 1,$$

откуда

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right). \qquad (*)$$

Кроме того,

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{(a-b)^2 + 2ab}{ab} = \frac{(a-b)^2}{ab} + 2.$$

Следовательно,

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2 \text{ и аналогично } \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geqslant 2, \quad \frac{c}{a} + \frac{a}{c} \geqslant 2,$$

что позволяет преобразовать неравенство (*) к виду

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant 3 + 2 + 2 + 2, \quad \text{или} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant 9.$$

Примечание. Можно спросить, в каких случаях (при предположениях, принятых в условиях задачи) достигается равенство

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 9, \qquad (**)$$

то есть при каких значениях a, b, c, дающих в сумме 1, сумма обратных величин достигает своего наименьшего значения, равного 9.

Ответ на этот вопрос нетрудно получить из приведенного выше доказательства. Равенство (**) достигается в том случае, если слагаемые, стоящие в правой части равенства (*), принимают наименьшие значения, то есть если

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{b}{c} + \frac{c}{b} = \frac{c}{a} + \frac{a}{c} = 2,$$

или, что то же, при

$$a = b = c = \frac{1}{3}.$$

10. Изобразив рассматриваемую фигуру при помощи параллельного косоугольного проектирования на плоскости, проходящей через балку в ее начальном положении AB и через точки подвеса M и N, получим рис. 7 или рис. 8, где $AB = a$, $AM = BN = b$, $\angle A = \angle B = 90°$.

Пусть S — середина балки. После поворота на угол φ вокруг вертикальной оси, проходящей через точку S, балка занимает положение CD. Середина отрезка CD — точка T — принадлежит плоскости проекции.

Положение проекции точки C зависит от направления пучка параллельных прямых, при помощи которых производилось проектирование. За проекцию точки C можно принять любую точку C', например ту, которая изображена на рис. 7 или на рис. 8. Проекция D' точки D симметрична точке C' относительно точки T.

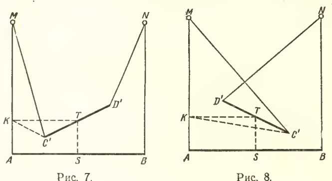


Рис. 7. Рис. 8.

Вычислить длину отрезка $ST = x$ (высоту подъема балки) несложно. Проведем отрезок TK, параллельный и равный отрезку SA. Тогда

$$x = AK = AM - KM.$$

Но $AM = b$, а отрезок KM служит катетом прямоугольного треугольника KMC с гипотенузой $MC = AM$ и другим катетом KC. Отрезок KC можно рассматривать как основание равнобедренного треугольника KTC,

в котором $TK = TC = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}a$, $\angle KTC = \varphi$. Следовательно,

$$KC = a\sin\frac{\varphi}{2}, \quad KM = \sqrt{b^2 - a^2\sin^2\frac{\varphi}{2}},$$

откуда окончательно получаем

$$x = b - \sqrt{b^2 - a^2\sin^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Если $b < a$, то угол φ поворота балки не может быть больше угла φ_0, определяемого выражением

$$\sin\frac{\varphi_0}{2} = \frac{b}{a}, \quad \text{где} \quad \varphi_0 < 180°.$$

При $\varphi = \varphi_0$ балка поднимается на высоту $x = b$. При дальнейшем увеличении угла φ тросы, на которых подвешена балка, рвутся.

Если $b \geqslant a$, то наибольшее значение угла φ равно 180°. При $\varphi = 180°$ тросы, на которых подвешена балка, перекрещиваются, если $b > a$, и налегают один на другой, если $b = a$.

В приведенном выше решении речь шла *о вычислении* высоты, на которую поднимается балка при повороте на угол φ вокруг вертикальной оси, проходящей через середину балки. Изображение при параллельном косоугольном проектировании понадобилось нам лишь как иллюстрация к проводимым выкладкам. Если же мы хотим, чтобы рисунок давал *графическое решение* задачи, то есть позволял при заданных длинах отрезков a и b и заданном угле φ получать длину отрезка ST, то проекцию необходимо строить иначе, а именно: точку T, положение которой на рис. 7 и 8 было условным, необходимо находить из геометрического построения по заданным a, b и φ.

Для этого заметим, что в прямоугольном треугольнике KMC нам известны гипотенуза $MC = MA$ и катет KC, равный основанию равнобедренного треугольника KCT, в котором $TK = TC = \frac{1}{2}a$, $\angle KTC = \varphi$. По этим данным мы можем построить треугольник и найти длины отрезков KM и $ST = AM - KM$. Это построение изображено на рис. 9.

Прежде всего мы строим треугольник ASP, в котором $AS = SP = \frac{1}{2}a$, $\angle ASP = \varphi$. Затем мы вычерчиваем полуокружность диаметром AM, проводим в ней хорду $AL = AP$ и откладываем на прямой MA отрезок MK, равный отрезку ML. Точка K расположена на одном

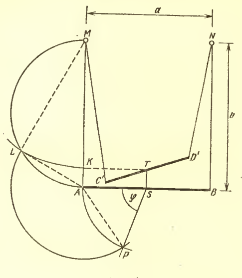


Рис. 9.

уровне с точкой T. Таким образом, искомая высота, на которую поднимается балка, равна длине отрезка $TS = KA$.

Проекцию $C'D'$ балки, повернутой на угол φ вокруг оси, проходящей через ее середину, мы найдем, выбрав произвольно точку C' и построив точку D', симметричную точке C' относительно точки T.

11. Отвлечемся на время от условия задачи, в котором говорится, что точки A, B, C, D лежат на одной окружности, и рассмотрим произвольный выпуклый четырехугольник $ABCD$, в котором продолжения сторон AB и CD пересекаются в точке E, а продолжения сторон AD и BC — в точке F.

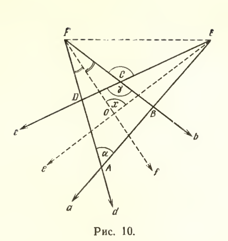


Рис. 10.

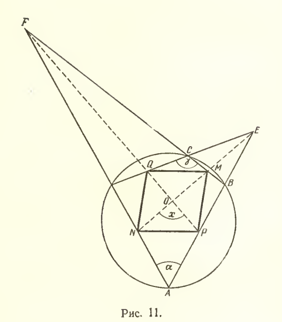


Рис. 11.

Проведем биссектрисы EO и FO углов E и F, а также отрезок EF (рис. 10) и рассмотрим треугольники EAF, ECF, EOF, имеющие общее основание EF.

Каждый из углов при основании EF в треугольнике EOF равен среднему арифметическому углов треугольников EAF и ECF при той же вершине. Отсюда следует, что и третий угол x треугольника EOF равен среднему арифметическому углов α и γ треугольников EAF и ECF, противолежащих общему основанию EF:

$$x = \frac{\alpha + \gamma}{2}.$$

Предположим теперь, что четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность (рис. 11). Тогда $\alpha + \gamma = 180°$ и из предыдущего соотношения следует, что

$$x = \frac{\alpha + \gamma}{2} = 90°.$$

Это означает, что диагонали четырехугольника $MPNQ$ взаимно перпендикулярны. Но тогда в треугольнике PEQ биссектриса EO угла E перпендикулярна стороне PQ. Следовательно, треугольник PEQ равнобедренный и точка O совпадает с серединой отрезка PQ. Аналогично доказывается, что точка O совпадает с серединой отрезка MN.

Четырехугольник $MPNQ$, диагонали которого взаимно перпендикулярны и делятся в точке пересечения пополам, как известно, является ромбом, что и требовалось доказать.

12. Прежде всего заметим, что если точки M и N лежат на заданной окружности k, то любая точка C окружности, за исключением точек M и N, удовлетворяет условиям задачи: точки A и B совпадают в этом случае с точками M и N, а треугольник ABC — с треугольником MNC. В дальнейшем мы будем предполагать, что по крайней мере одна из точек M и N не лежит на окружности k.

Если C — точка, которую требуется найти по условиям задачи, то для подобных треугольников ABC и MNC, имеющих равные углы при вершине C, должны выполняться либо соотношения (первого рода)

$$\angle A = \angle M, \quad \angle B = \angle N, \qquad \text{(I)}$$

либо соотношения (второго рода)

$$\angle A = \angle N, \quad \angle B = \angle M. \qquad \text{(II)}$$

Если треугольники ABC и MNC равнобедренные, то соотношения первого и второго рода выполняются одновременно.

I. Поиск решений первого рода. В решениях первого рода стороны AB и MN треугольников ABC и MNC параллельны, из чего следует, что либо обе точки M и N лежат на отрезках AC и BC, либо обе точки M и N лежат на продолжениях этих отрезков. Таким образом, исходная задача может иметь решение первого рода в том и только в том случае, если точки M и N лежат либо обе внутри, либо обе снаружи заданной окружности, что мы будем предполагать в дальнейшем. Если точка C обладает требуемым свойством (рис. 12),

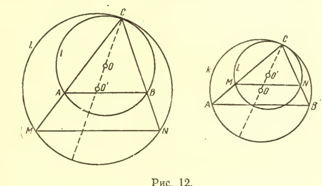


Рис. 12.

то треугольники ABC и MNC гомотетичны относительно точки C. При этой гомотетии окружности k, проходящей через центр гомотетии C и точки A и B, соответствует окружность l, касательная к окружности k в точке C и проходящая через точки M и N, прямо гомотетичные точкам A и B.

Таким образом, исходная задача сводится к построению окружности l, проходящей через заданные точки M и N и касательной к заданной окружности k.

Если окружность l построена, то точка C ее касания с заданной окружностью k обладает всеми требуемыми свойствами. Действительно, прямые MC и NC пересека-

ют окружность k, гомотетичную окружности l относительно точки C, в точках A и B, соответствующих точкам M и N. Треугольники ABC и MNC гомотетичны, причем $\angle A = \angle M$, а $\angle B = \angle N$.

Задача допускает столько решений, сколько существует окружностей, проходящих через точки M и N и касательных к окружности k. Отсюда мы заключаем (см. примечание к этой задаче), что

1) если точки M и N лежат обе внутри окружности k или если они обе лежат вне окружности k, но прямая MN не касается этой окружности, то исходная задача допускает два решения;

2) если точки M и N лежат вне окружности k, а прямая MN касается этой окружности, то исходная задача допускает одно решение.

Примечание. Одна из классических задач геометрии, известная как задача Аполлония[1], формулируется так: построить окружность, касательную к трем заданным окружностям. Если две из данных окружностей имеют радиус, равный нулю, то мы приходим к следующему предельному случаю задачи Аполлония: построить окружность, касательную к заданной окружности k и проходящую через две заданные (различные) точки M и N.

Приведем решение этой задачи в предположении, что точки M и N лежат либо обе внутри, либо обе вне заданной окружности. При любом ином расположении точек M и N относительно окружности k решение задачи Аполлония очевидно.

Предположим, что точки M и N равноудалены от центра O окружности k. Тогда окружность, проведенная через точки M, N и точку T окружности k, касается заданной окружности в том и только в том случае, если точка T лежит на прямой s, проходящей через середину отрезка MN перпендикулярно ему. Следовательно, искомую точку T мы получим, построив точку пересечения прямой s с окружностью k. Задача имеет два решения, за исключением того случая, когда прямая MN совпадает с касательной к окружности k (тогда задача имеет только одно решение).

Предположим теперь, что точки M и N не равноудалены от центра O заданной окружности, и проведем через точки M и N вспомогательную окружность l, пересекающую окружность k в точках A и B. В рассматриваемом случае прямая AB пересекает прямую MN в некоторой точке S. Через эту же точку проходит радикальная ось окружности k и любой другой окружности, проходящей через точки M и N, поскольку степени точки S относительно этих окружностей равны. Таким образом, окружность, проведенная через точки M и N, касается окружности k

[1] Аполлоний из Перги (III в. до н. э.) — один из выдающихся математиков Древней Греции.

в том и только в том случае, если радикальная ось этих окружностей, проходящая через точку S, касается окружности k. Следовательно, искомая точка T окружности k лежит на касательной к этой окружности, проведенной из точки S. Задача имеет два решения, за исключением того случая, когда прямая MN совпадает с касательной к окружности k (тогда задача допускает только одно решение).

II. Поиск решений второго рода. Предположим, что в треугольниках ABC и MNC (рис. 13)

$$\angle A = \angle N.$$

Из подобия треугольников ABC и MNC следует, что

$$\frac{CA}{CN} = \frac{CB}{CM},$$

поэтому

$$CA \cdot CM = CB \cdot CN.$$

Пусть r^2 — общее значение произведений, стоящих в правой и левой части последнего равенства. Тогда при

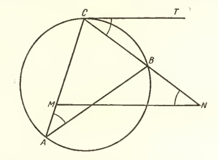


Рис. 13.

инверсии относительно окружности с центром C и радиусом r точке M соответствует точка A, а точке N — точка B. Таким образом, прямая MN при инверсии относительно окружности с центром C и радиусом r переходит в заданную окружность k.

Центр инверсии C лежит на оси симметрии фигуры, образованной окружностью k и прямой MN, то есть на перпендикуляре, опущенном из центра O окружности k на прямую MN. Если этот перпендикуляр пересекает окружность k в точке C, не лежащей на прямой MN, то

эта точка удовлетворяет всем условиям задачи. Действительно, прямая CM, не будучи перпендикулярной прямой CO, пересекает окружность k еще в одной точке, а именно в точке A. Аналогичным образом прямая CN имеет с окружностью k, помимо точки C, еще одну общую точку B. При инверсии с центром в точке C, отображающей точку A в точку M, окружности k соответствует прямая, проходящая через точку M и перпендикулярная прямой CO, то есть прямая MN. Но тогда при этой инверсии точка B переходит в точку N и, следовательно, выполняется равенство

$$CA \cdot CM = CB \cdot CN,$$

или, что то же,

$$\frac{CA}{CN} = \frac{CB}{CM}.$$

Таким образом, треугольники ABC и MNC подобны и $\angle A = \angle N$.

Проведенное построение выполнимо во всех случаях. Перпендикуляр, опущенный из точки O на прямую MN пересекает окружность k в двух точках, причем может случиться так, что одна из этих точек лежит на прямой MN. Так происходит, когда прямая MN совпадает с касательной к окружности k. В этом случае задача допускает одно решение. Если прямая MN не совпадает с касательной к окружности k, то задача имеет два решения.

13. Корни кубического уравнения

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$

образуют арифметическую прогрессию в том и только в том случае, если сумма двух из них равна удвоенному третьему или если сумма всех трех корней равна утроенному третьему корню. Поскольку сумма всех корней уравнения (1) равна $-a$, то этот третий корень уравнения равен $-{}^1/_3a$.

Итак, корни кубического уравнения (1) образуют арифметическую прогрессию в том и только в том случае, если число $-{}^1/_3a$ удовлетворяет данному уравнению.

Подставляя в уравнение (1) вместо x число $-{}^1/_3a$, запишем полученное необходимое и достаточное условие

в виде

$$\left(-\frac{1}{3}a\right)^3 + a\left(-\frac{1}{3}a\right)^2 + b\left(-\frac{1}{3}a\right) + c = 0,$$

или после упрощения — в виде

$$2a^3 - 9ab + 27c = 0. \qquad (2)$$

Предположим, что коэффициенты a, b, c удовлетворяют соотношению (2), то есть что уравнение (1) имеет корень $x_1 = -{}^1/_3a$. Мы должны вывести еще необходимое и достаточное условие, при котором два остальных корня x_2 и x_3 уравнения (1) вещественны.

По теореме Виета

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a, \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b,$$

а $x_1 = -{}^1/_3a$. Следовательно,

$$x_2 + x_3 = -\frac{2}{3}a, \quad x_2x_3 = b - \frac{2}{9}a^2.$$

Таким образом, числа x_2 и x_3 удовлетворяют квадратному уравнению

$$x^2 + \frac{2}{3}ax + \left(b - \frac{2}{9}a^2\right) = 0. \qquad (3)$$

Поэтому они вещественны в том и только в том случае, если

$$\Delta = \frac{4}{9}a^2 - 4\left(b - \frac{2}{9}a^2\right) \geqslant 0,$$

или

$$a^2 - 3b \geqslant 0. \qquad (4)$$

Итак, необходимыми и достаточными условиями, при которых корни кубического уравнения (1) вещественны и образуют арифметическую прогрессию, служат соотношения (2) и (4).

14. Утверждение задачи мы докажем, преобразуя исходное равенство

$$\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C = 1. \qquad (1)$$

Рассуждать при этом можно по-разному.

Например, для того чтобы один из углов A, B, C был равен 120°, необходимо и достаточно обращение в нуль одной из разностей $1 - \cos 3A$, $1 - \cos 3B$, $1 - \cos 3C$. В свою очередь одна из этих разностей обра-

щается в нуль в том и только в том случае, если

$$(1-\cos 3A)(1-\cos 3B)(1-\cos 3C)=0. \qquad (2)$$

Итак, попытаемся доказать, что из равенства (1) следует соотношение (2). Для упрощения выкладок произведем в равенстве (1) подстановку $C=180^\circ-(A+B)$, в силу чего $\cos 3C=-\cos(3A+3B)$, и получим

$$\cos 3A+\cos 3B-\cos(3A+3B)=1 \qquad (3)$$

или

$$\cos 3A+\cos 3B-\cos 3A\cos 3B+\sin 3A\sin 3B-1=0. \quad (4)$$

Поскольку нам необходимо получить соотношение, содержащее только косинусы углов, запишем равенство (4) в виде

$$\sin 3A\sin 3B=(1-\cos 3A)(1-\cos 3B)$$

и возведем обе части в квадрат:

$$\sin^2 3A\sin^2 3B=(1-\cos 3A)^2(1-\cos 3B)^2.$$

Преобразуя это соотношение, получаем

$$(1-\cos^2 3A)(1-\cos^2 3B)-(1-\cos 3A)^2(1-\cos 3B)^2=0,$$
$$(1-\cos 3A)(1-\cos 3B)[(1+\cos 3A)(1+\cos 3B)-$$
$$-(1-\cos 3A)(1-\cos 3B)]=0,$$
$$(1-\cos 3A)(1-\cos 3B)(\cos 3A+\cos 3B)=0.$$

Равенство (2) следует из последнего соотношения, поскольку по предположению задачи

$$\cos 3A+\cos 3B=1-\cos 3C$$

в силу равенства (1).

15. Первое решение. Заметим, что если c и d — последние цифры натуральных чисел a и b, то

$$ab=(10k+c)(10l+d)=10(10kl+kd+cl)+cd,$$

где k и l — неотрицательные целые числа. Следовательно, последняя цифра произведения ab совпадает с последней цифрой произведения cd. Пользуясь этим, будем рассуждать следующим образом.

Известно, что

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Если число n заканчивается цифрой 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, то число $n+1$ — цифрой 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, а произведение $n(n+1)$ — цифрой 0, 2, 6, 2, 0, 0, 2, 6, 2, 0.

Если бы число $\frac{n(n+1)}{2}$ заканчивалось цифрой 2, 4, 7, 9, то последней цифрой числа $2 \cdot [n(n+1)]/2 = n(n+1)$ была бы цифра 4, 8, 4, 8, что, как мы доказали выше, невозможно.

Второе решение. Задача допускает простое и наглядное решение, если рассуждать следующим образом.

Пусть $S_n = 1 + 2 + \ldots + n$. Заметим, что если разность $k - l$ (k, l — произвольные натуральные числа) делится на 5, то разность $S_k - S_l$ также делится на 5. Действительно,

$$S_k - S_l = \frac{k(k+1)}{2} - \frac{l(l+1)}{2} = \frac{(k-l)(k+l+1)}{2},$$

где правая часть делится на любой нечетный делитель числа $k - l$.

Разделим круг на 5 секторов A, B, C, D, E (рис. 14).

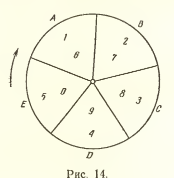


Рис. 14.

Следуя в направлении, указанном стрелкой, разместим в секторах по порядку цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 так, как показано на рис. 14. Если m — любое натуральное число, то его последняя цифра находится в m-м секторе, считая от сектора A в направлении стрелки. Если два числа отличаются на целое кратное числа 5, то цифры, которыми они заканчиваются, находятся в одном и том же секторе, поскольку увеличению числа на $5k$ со-

ответствует k-кратный обход нашего «циферблата». Последние цифры сумм $S_1 = 1$, $S_2 = 1 + 2$, $S_3 = 1 + 2 + 3$, $S_4 = 1 + 2 + 3 + 4$, $S_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$ находятся соответственно в секторах A, C, A, E, E. В тех же секторах (в том же порядке) находятся последние цифры следующих пяти сумм S_6, S_7, S_8, S_9, S_{10}, поскольку эти суммы отличаются от сумм S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 на числа, кратные 5. Аналогичное утверждение справедливо и относительно следующих пяти сумм $S_{11}, S_{12}, \ldots, S_{15}$ и так далее. Таким образом, последняя цифра любой суммы S_n должна находиться в одном из секторов A, C, E. Это может происходить лишь в том случае, если суммы S_n заканчиваются одной из цифр 1, 6, 3, 8, 0, 5.

Примечание. Аналогичным образом можно доказать, что последняя цифра суммы квадратов, а также суммы кубов натуральных чисел от 1 до n может находиться только в одном из секторов A, D, E, то есть совпадать только с одной из цифр 1, 6, 4, 9, 0, 5.

16. Известно, что

$$(A + B) + (C + D) = 360°,$$

поэтому если

$$A + B \neq 90° \quad \text{и} \quad A + B \neq 270°,$$

то

$$\operatorname{tg}(A + B) + \operatorname{tg}(C + D) = 0 \qquad (1)$$

и

$$\frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{1 - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B} + \frac{\operatorname{tg} C + \operatorname{tg} D}{1 - \operatorname{tg} C \operatorname{tg} D} = 0.$$

Умножая обе части этого равенства на $(1 - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B) \cdot (1 - \operatorname{tg} C \operatorname{tg} D)$, получаем

$$(\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B)(1 - \operatorname{tg} C \operatorname{tg} D) + (\operatorname{tg} C + \operatorname{tg} D)(1 - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B) = 0,$$

или после несложных преобразований

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} D = \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C \operatorname{tg} D + \operatorname{tg} A \operatorname{tg} C \operatorname{tg} D + \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} D + \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C.$$

Разделив правую и левую части последнего равенства на произведение $\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C \operatorname{tg} D$, преобразуем его

к виду

$$\frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} D}{\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C \operatorname{tg} D} = \operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C + \operatorname{ctg} D. \quad (*)$$

Именно это соотношение и требовалось доказать.

В приведенном выше доказательстве имеется пробел, а именно: равенство (1) было получено в предположении, что $A + B \neq 90°$ и $A + B \neq 270°$. Поэтому необходимо еще рассмотреть случай, когда $A + B = 90°$, в силу чего

$$C + D = 270°. \quad (2)$$

(Случай, когда $A + B = 270°$ и $C + D = 90°$, не требует особого рассмотрения, поскольку сводится к предыдущему при изменении обозначений углов четырехугольника.)

Из равенств (2) и того, что каждый угол выпуклого четырехугольника содержится между 0° и 180°, следуют неравенства

$$0° < A < 90°,$$
$$90° < C < 180°, \quad (3)$$

из которых мы получаем новое неравенство

$$90° < A + C < 270°.$$

Поскольку $A + C = 360° - (B + D)$, то

$$\operatorname{tg}(A + C) + \operatorname{tg}(B + D) = 0. \quad (1a)$$

Соотношение, приведенное в условиях задачи, выводится из равенства (1а) так же, как выше мы вывели его (при дополнительном предположении о том, что $A+B \neq 90°$ и $A + B \neq 270°$) из равенства (1).

Прнмечанне. При выводе иеравенств (3) мы воспользовались предположеинем о выпуклостн четырехугольника $ABCD$. Возникает вопрос: выполняется лн соотиошение (*), прнведеиное в условиях задачн, для невыпуклого четырехугольннка, ни одии из углов которого ие равен 90° и 270°? Оказывается, что соотиошеиие (*) остается в силе и для иевыпуклого четырехугольника, одиако доказательство его, приведеииое выше для случая выпуклого четырехугольиика, необходнмо иесколько дополиить.

Итак, предположнм, что четырехугольник $ABCD$ невыпуклый. Как и в случае выпуклого четырехугольиика, сумма углов равиа 360°:

$$A + B + C + D = 360°,$$

поскольку диагоиаль, проведениая нз вершины угла, который больше 180°, делит четырехугольиик иа два треугольиика.

Если четырехугольиик $ABCD$ содержит два угла, сумма которых отлнчна от 90° н от 270°, то соотношение (*) можио доказать так же, как и в случае выпуклого четырехугольиика.

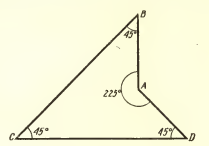
Но существуют н такие невыпуклые четырехугольники, у которых любые два угла в сумме равиы либо 90°, либо 270°. Пусть A — угол такого четырехугольиика, который больше 180°. Тогда

$$B + C = 90°,$$
$$C + D = 90°,$$
$$D + B = 90°,$$

откуда следует, что

$$B = C = D = 45°, \quad A = 225°.$$

Приведениое выше доказательство иеприменимо к такому четырехугольинку (рис. 15). Но соотиошенне (*) выполняется и



Рнс. 15.

в этом случае, поскольку все входящие в него тангенсы равны 1 н оно вырождается в тождество $4 = 4$.

17. Пусть X, Y, Z — точки пересечения прямых AM, BN, CP (рис. 16).

Поскольку площади треугольников с равными высотами относятся как основания, то

$$S_{ABM} = \frac{BM}{BC} \cdot S, \quad S_{ABX} = \frac{AX}{AM} \cdot S_{ABM}$$

и, таким образом,

$$S_{ABX} = \frac{BM}{BC} \cdot \frac{AX}{AM} \cdot S. \qquad (1)$$

Величины отношений BM/BC и AX/AM мы вычислим, используя ряд равных отношений

$$\frac{BM}{MC}=\frac{CN}{NA}=\frac{AP}{PB}=k, \qquad (*)$$

приведенный в условиях задачи.

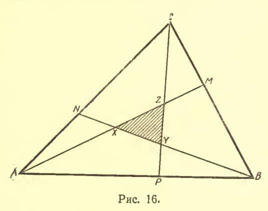


Рис. 16.

Действительно,

$$\frac{BC}{BM}=\frac{BM+MC}{BM}=1+\frac{1}{k}=\frac{k+1}{k},$$

откуда

$$\frac{BM}{BC}=\frac{k}{k+1}. \qquad (2)$$

Величину отношения AX/AM мы найдем, применив к треугольнику ACM, пересеченному прямой BN, теорему Менелая, то есть из соотношения

$$\frac{AN}{NC}\cdot\frac{CB}{BM}\cdot\frac{MX}{XA}=1.$$

Последнее можно представить в виде

$$\frac{NA}{CN}\cdot\frac{MC+BM}{BM}\cdot\frac{MX}{XA}=1.$$

Подставляя из (*) значения отношений

$$\frac{NA}{CN}=\frac{MC}{BM}=\frac{1}{k},$$

получаем

$$\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}+1\right)\frac{MX}{XA}=1,$$

откуда

$$\frac{AX}{XM}=\frac{k+1}{k^2}$$

и

$$\frac{AX}{AM}=\frac{AX}{AX+XM}=\frac{k+1}{k^2+k+1}. \qquad (3)$$

Подставляя значения отношений BM/BC и AX/AM из (2) и (3) в соотношение (1), находим площадь треугольника ABX:

$$S_{ABX}=\frac{k}{k^2+k+1}S.$$

Площадь треугольника BCY мы вычислим, заменив в приведенных выше выкладках буквы A, B, C соответственно буквами B, C, A, буквы M и N — буквами N и P и букву X — буквой Y. Аналогичным образом можно найти и площадь треугольника CAZ. Ясно, что все вычисления приводят к одним и тем же результатам, так что

$$S_{BCY}=S_{CAZ}=S_{ABX}=\frac{k}{k^2+k+1}S.$$

Поскольку

$$S_{XYZ}=S-(S_{ABX}+S_{BCY}+S_{CAZ}),$$

то

$$S_{XYZ}=S-\frac{3k}{k^2+k+1}S,$$

или

$$S_{XYZ}=\frac{(k-1)^2}{k^2+k+1}S. \qquad (4)$$

Примечание. Условие $k>1$ можно заменить более слабым условием $k>0$ и $k\neq 1$. Все рассуждения и окончательный результат вычислений — соотношение (4) — остаются при этом прежними.

При $k=0$ точки M, N, P совпадают соответственно с точками B, C, A, а треугольник XYZ — с треугольником BCA. При

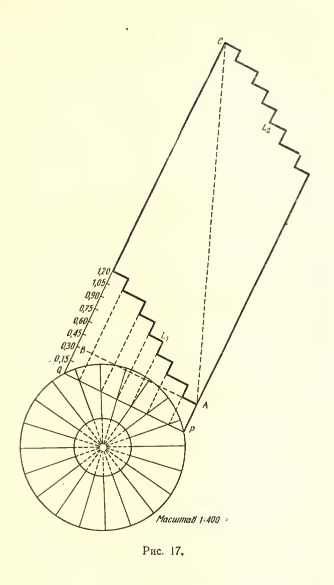


Рис. 17.

$k = 1$ треугольник XYZ вырождается в точку — центр тяжести треугольника ABC. Выражение (4) в обоих случаях дает правильное значение площади треугольника XYZ: S и 0.

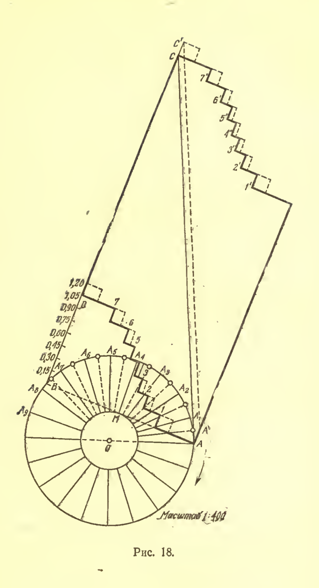
18. На один полный оборот винтовой лестницы приходится $360/18 = 20$ ступеней общей высотой $20 \cdot 0{,}15 = 3$ м. Таким образом, ступень с номером $20 + k$ расположена как раз над ступенью с номером k в 3 м от нее. Ортогональная проекция винтовой лестницы на горизонтальную плоскость имеет вид кругового кольца, разделенного на 20 секторов (рис. 17). Наружный радиус кольца составляет 1 м, внутренний — 0,32 м. Стержень, который необходимо пронести по винтовой лестнице, находится в сечении лестничной клетки вертикальной плоскостью α. Пусть прямая PQ — след плоскости α на ортогональной проекции лестничной клетки на горизонтальную плоскость. Вид сечения лестничной клетки плоскостью α мы найдем, отложив на перпендикулярах, восставленных из различных точек хорды PQ, отрезки, равные высоте соответствующих точек сечения над основанием башни (рис. 17). Ломаная L_2 получается при параллельном переносе ломаной L_1 в направлении, перпендикулярном прямой AB, на 3 м. В построенном нами сечении может уместиться стержень, длина которого не превышает длину отрезка

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}.$$

Рассматривая вертикальную плоскость, параллельную плоскости α, нетрудно убедиться в том, что отрезок AC достигает наибольшей длины, когда след плоскости α на ортогональной проекции лестничной клетки на горизонтальную плоскость касается внутренней окружности кольца, поскольку при этом отрезки AB и BC имеют наибольшую длину.

Итак, исходная задача сводится к вычислению наибольшей длины стержня, который можно пронести по винтовой лестнице так, чтобы он все время касался внутреннего столба.

Сечение лестничной клетки плоскостью, касательной к столбу, построим аналогично тому, как это было сделано на рис. 17. Единственное отличие состоит в том, что прямая AB касается меньшей окружности (рис. 18).



C'
C
7'
6'
5'
4'
3'
2'
1'
1,20
1,05
0,90
D
0,75
0,60
0,45
0,30
0,15
7
6
5
3
2
1
A6
A5
A4
A3
A2
A7
A8
B
A9
M
A1
A'
A
O
Масштаб 1:400

Рис. 18.

Длину хорды AB мы найдем из соотношения $AB^2 = 4(OA^2 - OM^2) = 4 - (0{,}64)^2$, а центральный угол AOB — из соотношения $\cos\left(\frac{1}{2}\angle AOB\right) = OM/OA = 0{,}32$, из которого следует, что $\angle AOB = 142°40'$. В угле AOB помещается приблизительно $7^8/_9$ отрезка, соответствующих ступеням лестницы.

Сечение, изображенное на рис. 18 сплошными линиями, проходит через конец A ребра одной из ступеней. Поэтому в нижней части сечения имеются 7 точек пересечения плоскости вертикального сечения с ребрами ступеней. Это точки 1, 2, ..., 7, принадлежащие ребрам ступеней, которые проектируются в отрезки $OA_1, OA_2, \ldots, OA_7$. В верхней части сечения имеются аналогичные точки 1′, 2′, ..., 7′. Нетрудно видеть, что $BD = 7 \cdot 0{,}15$ м $= 1{,}05$ м, $BC = BD + DC = 1{,}05$ м $+ 3$ м $= 4{,}05$ м.

В таком сечении можно поместить стержень, длина которого не превышает длину отрезка

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} \approx 4{,}47 \text{ м}.$$

Пусть плоскость вертикального сечения поворачивается вокруг оси башни. Сечение будет изменяться в зависимости от угла поворота, причем все возможные виды сечения встретятся уже при углах поворота, заключенных между 0° и 18°. При дальнейшем увеличении угла через каждые 18° сечения повторяются, сдвигаясь вверх на 0,15 м.

Для того чтобы проследить на рисунке за изменением формы сечения, удобно предположить, что плоскость ABC сечения неподвижна, а *поворачивается башня* (например, в направлении, указанном стрелкой на рис. 18). Тогда при повороте на угол от 0° до 18° точка A_1 описывает дугу A_1A, а точка A_8 — дугу A_8A_7. Рассмотрим более подробно, как происходит такой поворот.

1. Пока точка A_8 описывает дугу A_8B, стержень, находившийся сначала в положении AC, может оставаться в том же положении, то есть иметь вычисленную выше максимальную длину 4,47 м. Заметим, что при повороте на угол A_8OB ни одно из ребер ступеней винтовой лестницы не мешает стержню располагаться вдоль отрезка AC: из рис. 18 ясно видно, что точки *1*, *2*, ..., *7* все время остаются по одну сторону, а точки *1′*, *2′*, ...

..., $7'$ — по другую сторону относительно прямой AC. В этом можно также убедиться, произведя соответствующие выкладки и доказав, что углы $BA1$, $BA2$, ..., $BA7$ остаются меньше, а углы $BC1$, $BC2$, ..., $BC7$ — больше угла BCA.

2. После того как точка A_8 совпадает с точкой B и начинает описывать дугу BA_7, ситуация изменяется. Плоскость ABC, помимо перечисленных выше ребер ступеней, проходит также через ребра ступеней, проектирующихся на радиус OA_8. В верхней части сечения с левой стороны возникает восьмая выемка, и стержень можно постепенно передвигать в плоскости ABC вверх из положения AC до положения $A'C'$, то есть поднять на высоту одной ступени, или 0,15 м. На рис. 18 соответствующий вид сечения показан пунктиром.

3. Когда точка A_8 находится в положении A_7, мы получаем сечение того же вида, что и в исходном положении плоскости, но поднятое вверх на 0,15 м. Стержень сохраняет положение $A'C'$, в котором остается до того момента, пока точка A_9 не совпадает с точкой B, после чего его снова можно сдвинуть вверх, и так далее.

Из сказанного следует, что стержень длиной 4,47 м можно пронести по винтовой лестнице снизу вверх. Более длинный стержень пронести невозможно, поскольку он не уместился бы в некоторых сечениях, например в начальном сечении, лестничной клетки.

19. Прежде всего докажем, что для любого натурального n существуют такие натуральные числа a и b, при которых

$$\begin{cases} (1-\sqrt{2})^n = \sqrt{a^2} - \sqrt{2b^2}, \\ a^2 - 2b^2 = (-1)^n. \end{cases}$$

Доказательство. При $n = 1$ утверждение верно: в этом нетрудно убедиться, взяв $a = b = 1$. Предположим, что утверждение выполняется при некотором n. Тогда

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{2})^{n+1} &= (1-\sqrt{2})^n \cdot (1-\sqrt{2}) = \\ &= (\sqrt{a^2} - \sqrt{2b^2})(1-\sqrt{2}) = (a - b\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) = \\ &= (a+2b) - (a+b)\sqrt{2} = \sqrt{(a+2b)^2} - \sqrt{2(a+b)^2} = \\ &= \sqrt{a_1^2} - \sqrt{2b_1^2},\end{aligned}$$

где a_1 и b_1 — натуральные числа и

$$a_1^2 - 2b_1^2 = (a + 2b)^2 - 2(a + b)^2 = -a^2 + 2b^2 = \\ = -(a^2 - 2b^2) = (-1)^{n+1}.$$

Таким образом, утверждение верно и при показателе, равном $n + 1$. Пользуясь принципом математической индукции, мы заключаем отсюда, что утверждение выполняется при любом натуральном n.

Утверждение задачи непосредственно следует из доказанного утверждения. Действительно, если n — четное число, то

$$(\sqrt{2} - 1)^n = (1 - \sqrt{2})^n = \sqrt{a^2} - \sqrt{2b^2},$$

причем a, b, так же как и a^2, $2b^2$, — натуральные числа, а $a^2 - 2b^2 = 1$. Если же n — нечетное число, то

$$(\sqrt{2} - 1)^n = -(1 - \sqrt{2})^n = \sqrt{2b^2} - \sqrt{a^2},$$

где $2b^2$, a^2 — натуральные числа и

$$2b^2 - a^2 = -(a^2 - 2b^2) = -(-1) = 1.$$

20. Предположим, что $b > 0$ (если $b = 0$, то есть если велосипедист находится на шоссе, то задача допускает тривиальное решение).

Пусть M — точка, в которой находится велосипедист, S — точка встречи, α — угол MOS, t — время, отсчитываемое от того момента, когда велосипедист пускается в путь до момента встречи, x — скорость велосипедиста. Применяя к треугольнику MOS, в котором $OS = vt$, $MS = xt$, $OM = a$, $\angle MOS = \alpha$, теорему косинусов, получаем

$$x^2t^2 = a^2 + v^2t^2 - 2avt\cos\alpha,$$
$$x^2 = \frac{a^2}{t^2} - 2av\cos\alpha \cdot \frac{1}{t} + v^2.$$

Пусть $1/t = s$, тогда

$$x^2 = a^2s^2 - 2av\cos\alpha \cdot s + v^2 = (as - v\cos\alpha)^2 + v^2 - v^2\cos^2\alpha,$$

или, более кратко,

$$x^2 = (as - v\cos\alpha)^2 + v^2\sin^2\alpha. \qquad (1)$$

Требуется найти такое положительное значение s, при котором положительная величина x, а следовательно,

и x^2, принимает наименьшее значение, причем необходимо различать два случая.

Случай 1: $\cos\alpha > 0$, то есть угол α острый. Из соотношения (1) следует, что x принимает наименьшее значение $x_{\min}$, когда $as - v\cos\alpha = 0$, откуда

$$s = \frac{v\cos\alpha}{a}.$$

Таким образом, $x^2_{\min} = v^2\sin^2\alpha$ и $x_{\min} = v\sin\alpha$.

Случай 2: $\cos\alpha \leqslant 0$, то есть угол α прямой или тупой. В этом случае не существует минимальной скорости, позволяющей велосипедисту догнать автомобиль, поскольку выражение $as - v\cos\alpha$ и, следовательно, x^2 принимают тем меньшие значения, чем ближе к нулю величина s, то есть чем больше t. При неограниченном возрастании t величина s стремится к нулю, а x, как видно из соотношения (1), стремится к v.

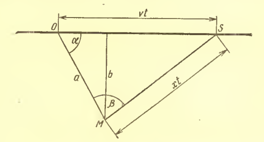


Рис. 19.

Поясним наши выводы на рисунках. При $\alpha < 90°$ (рис. 19) минимальная скорость велосипедиста составляет $v\sin\alpha = \frac{vb}{a}$. Встреча его с автомобилем происходит в тот момент, когда $\frac{1}{t} = \frac{v\cos\alpha}{a}$. Следовательно, до встречи велосипедист успевает проехать расстояние $MS = v\sin\alpha \cdot \frac{a}{v\cos\alpha} = a\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Это означает, что $\angle OMS = 90°$ и велосипедист должен ехать по прямой, составляющей прямой угол с отрезком OM.

При $\alpha \geqslant 90°$ (рис. 20) велосипедисту необходимо преодолеть большее расстояние, чем автомобилю. Сле-

довательно, догнать автомобиль велосипедист может только в том случае, если сумеет развить скорость, превышающую скорость v автомобиля. Однако разность между скоростью велосипедиста и скоростью автомобиля тем меньше, чем больше угол OMS ($\angle OMS = \beta$).

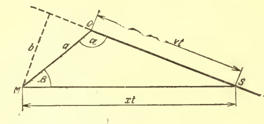


Рис. 20.

Эта разность может быть сколь угодно мала, если велосипедист будет ехать вдоль прямой, образующей с отрезком OM угол, достаточно близкий к $180° - \alpha$.

21. Преобразуем исходное соотношение

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma \qquad (1)$$

к виду

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\gamma (\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta - 1).$$

Если $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \neq 1$, то обе части равенства можно разделить на $1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta$:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} = -\operatorname{tg}\gamma,$$

откуда

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \operatorname{tg}(-\gamma),$$

в силу чего

$$\alpha + \beta = -\gamma + k\pi,$$

или

$$\alpha + \beta + \gamma = k\pi \quad (k - \text{целое число}). \qquad (2)$$

Проводя выкладки, мы исходим из предположения о том, что $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \neq 1$. Это неравенство верно во всех случаях, когда выполняется соотношение (1).

Действительно, если бы имело место равенство $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = 1$, то из соотношения (1) мы получили бы равенство $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = 0$, что невозможно, поскольку знаки двух чисел, произведение которых равно 1, одинаковы и сумма двух таких чисел не равна нулю.

Итак, мы приходим к следующему заключению: если для углов α, β, γ выполняется равенство (1), то эти углы удовлетворяют алгебраическому соотношению (2).

Наоборот, если при некотором целом k числа α, β, γ удовлетворяют условию (2) и ни одно из них не совпадает с нечетным кратным числа $\pi/2$, то производя приведенные выше выкладки от конца к началу, мы приходим к соотношению (1).

Следовательно, числа α, β, γ, отличные от $(2n+1)\pi/2$, где n — некоторое целое число, удовлетворяют соотношению (1) в том и только в том случае, если при некотором целом k выполняется соотношение (2).

22. Доказав, что любая плоская фигура, имеющая две оси симметрии, которые расположены не под пря-

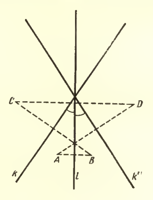


Рис. 21.

мым углом друг к другу, обладает по крайней мере еще одной осью симметрии, мы тем самым докажем утверждение задачи.

Предположим, что плоская фигура F имеет две оси симметрии k и l, которые не взаимно перпендикулярны. Эти оси могут пересекаться (рис. 21) или быть парал-

лельными (рис. 22). В обоих случаях доказательство проводится одинаково. Пусть k' — прямая, симметричная прямой k относительно прямой l. Ясно, что прямая k' отлична от прямой k и от прямой l. Докажем, что прямая k' является осью симметрии фигуры F.

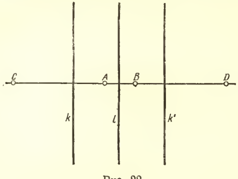


Рис. 22.

Если фигура F содержит некую точку A, то она содержит также точку B, симметричную точке A относительно оси l, точку C, симметричную точке B относительно оси k, и точку D, симметричную точке C относительно оси l. Заметим, что отрезок AD симметричен отрезку BC относительно оси l, поскольку точки A и D симметричны точкам B и C относительно этой оси. Следовательно, прямая, перпендикулярная отрезку AD и проходящая через его середину, симметрична прямой, перпендикулярной отрезку BC (то есть прямой k) и проходящей через его середину, относительно оси l. Это означает, что прямая k' совпадает с прямой, проходящей через середину отрезка AD и образующей с ним прямой угол. Итак, мы доказали, что если плоская фигура F содержит некую точку A, то она содержит также точку D, симметричную точке A относительно прямой k'. Таким образом, k' — ось симметрии фигуры F, что и требовалось доказать.

23. Фигуру, образованную двумя скрещивающимися прямыми m и n, удобнее всего изобразить при помощи проекций на две взаимно перпендикулярные плоскости. Плоскость горизонтальной проекции выберем так, чтобы

она была параллельной прямым m и n (рис. 23). Тогда вертикальные проекции прямых m и n будут иметь вид параллельных прямых m'' и n'', расстояние d между которыми равно расстоянию между скрещивающимися прямыми m и n, а горизонтальные проекции m' и n' будут двумя пересекающимися прямыми, образующими угол φ, равный углу между скрещивающимися прямыми

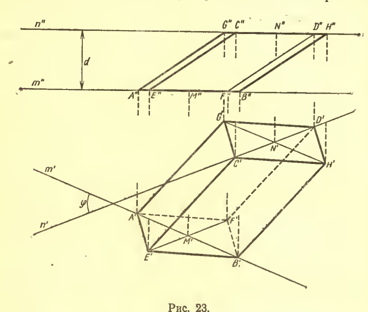


Рис. 23.

m и n. Горизонтальные проекции отрезков AB и CD, параллельных плоскости, названной нами горизонтальной, имеют длины $A'B' = a$ и $C'D' = b$.

Чтобы вычислить объем тетраэдра $ABCD$, рассмотрим сначала параллелепипед, «описанный» вокруг этого тетраэдра, а именно: параллелепипед, для которого отрезки AB и CD совпадают с диагоналями двух противоположных граней. Другими диагоналями тех же граней служат отрезок EF длины b, параллельный отрезку CD и имеющий общую середину M с отрезком AB, и отрезок GH длины a, параллельный отрезку AB и имеющий общую середину N с отрезком CD.

Объем V построенного таким способом параллелепипеда равен произведению площади грани $AEBF$ на расстояние от этой грани до противоположной, то есть на d.

Поскольку площадь параллелограмма $AEBF$, диагонали которого равны a и b образуют угол φ, составляет $\frac{1}{2}ab\sin\varphi$, то $V=\frac{1}{2}abd\sin\varphi$.

Тетраэдр $ABCD$ мы получим после того, как отсечем от построенного нами параллелепипеда четыре наружных тетраэдра $EABC$, $FABD$, $GACD$, $HBCD$ (рис. 24).

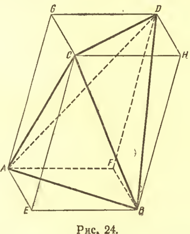


Рис. 24.

Объем каждого из этих тетраэдров, основания которых вдвое меньше оснований параллелепипеда, а высота равна d, составляет $\frac{1}{6}V$.

Таким образом, объем тетраэдра $ABCD$ равен $\frac{1}{3}V=$ $=\frac{1}{6}abd\sin\varphi$ и, следовательно, зависит от a, b, d и угла φ, но не зависит от положения отрезков AB и CD на прямых m и n, что и требовалось доказать.

24. Найдем прежде всего геометрическое место центров L прямоугольников $EFGH$, две вершины которых E и F лежат на стороне AB треугольника ABC, вершина G лежит на стороне BC, а вершина H — на стороне AC.

Такие прямоугольники существуют лишь в том случае, если ни один из углов A и B треугольника не тупой. В дальнейшем мы будем предполагать, что оба угла A и B острые. В том случае, если один из этих углов прямой, в приводимое ниже решение необходимо внести незначительные изменения. Это мы предоставляем читателю.

Точки L, геометрическое место которых мы ищем, являются серединами отрезка PQ, соединяющего середины боковых сторон EH и FG прямоугольника (рис. 25). Проведем высоту CD треугольника ABC.

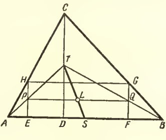


Рис. 25.

Поскольку треугольники AEH и ADC гомотетичны относительно точки A, а треугольники BFG и BDC — относительно точки B, то прямые AP и BQ проходят через середину T отрезка CD. Треугольники PQT и ABT гомотетичны относительно точки T, поэтому прямая TL проходит через середину S отрезка AB. Следовательно, центр L прямоугольника $EFGH$ лежит внутри отрезка ST, соединяющего середину стороны AB с серединой высоты CD треугольника ABC.

Наоборот, каждая точка L, лежащая внутри отрезка ST, служит центром некоторого прямоугольника $EFGH$ рассматриваемого нами типа (вершины E и F лежат на основании AB треугольника ABC, вершина H лежит на стороне AC и вершина G — на стороне BC). Действительно, проведя через точку L отрезок PQ, гомотетичный отрезку AB относительно точки T, а затем через точки P и Q отрезки EH и FG, прямо гомотетичные отрезку CD относительно точек A и B, мы получим четырехугольник $EFGH$. Из свойств прямо гомотетичных отрезков следует, что точки P и Q совпадают с серединами отрез-

ков EH и FG, а точка L — с серединой отрезка PQ. Отсюда мы заключаем, что $EFGH$ — прямоугольник, а точка L — его центр.

Таким образом, геометрическим местом центров L прямоугольников, две вершины которых лежат на стороне AB треугольника ABC, а две другие вершины — на сторонах AC и BC, является внутренность отрезка, соединяющего середину стороны AB с серединой опущенной на нее высоты треугольника ABC.

Если заданный треугольник остроугольный, то наше утверждение выполняется для каждой из трех его сторон и геометрическое место, о котором говорится в условиях задачи, состоит из внутренних точек трех отрезков, соединяющих середины сторон треугольника с серединами опущенных на них высот. Докажем, что эти три отрезка пересекаются в одной точке.

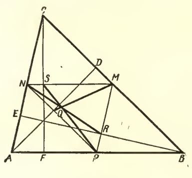


Рис. 26.

Выберем обозначения точек так, как показано на рис. 26: пусть D, E, F — основания высот, M, N, P — середины сторон и Q, R, S — середины высот треугольника ABC. Применяя к этому треугольнику и трем его высотам теорему Чевы, получаем

$$\frac{AF \cdot BD \cdot CE}{FB \cdot DC \cdot EA} = 1.$$

Поскольку стороны треугольника MNP параллельны соответствующим сторонам треугольника ABC, то

$$\frac{NS}{SM} = \frac{AF}{FB}, \quad \frac{PQ}{QN} = \frac{BD}{DC}, \quad \frac{MR}{RP} = \frac{CE}{EA}$$

и предыдущее соотношение можно преобразовать к следующему виду:

$$\frac{NS \cdot PQ \cdot MR}{SM \cdot QN \cdot RP} = 1.$$

По теореме, обратной теореме Чевы, это равенство означает, что прямые MQ, NR и PS пересекаются в одной точке.

Если треугольник ABC прямоугольный, то два из трех отрезков, образующих рассматриваемое нами геометрическое место точек, совпадают. Этот случай изображен на рис. 27.

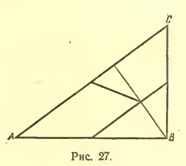


Рис. 27.

В тупоугольном треугольнике рассматриваемое геометрическое место образуют внутренние точки одного отрезка [1].

25. Заметим, что поскольку

$$\left(x^m + \frac{1}{x^m}\right)\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) = \left(x^{m+n} + \frac{1}{x^{m+n}}\right) + \left(x^{m-n} + \frac{1}{x^{m-n}}\right),$$

то

$$x^{m+n} + \frac{1}{x^{m+n}} = \left(x^m + \frac{1}{x^m}\right)\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) - \left(x^{m-n} + \frac{1}{x^{m-n}}\right). \quad (1)$$

[1] По поводу теоремы Чевы см. примечание к решению задачи 77. — *Прим. ред.*

Тождество (1) позволяет свести вычисление значений, принимаемых выражением вида $x^k + \frac{1}{x^k}$, к вычислению значений, принимаемых выражениями того же вида, но с меньшим показателем k.

В частности, при $n = 1$ тождество (1) принимает вид

$$x^{m+1} + \frac{1}{x^{m+1}} = \left(x^m + \frac{1}{x^m}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}}\right), \quad (2)$$

а при $n = m$ переходит в тождество

$$x^{2m} + \frac{1}{x^{2m}} = \left(x^m + \frac{1}{x^m}\right)^2 - 2. \quad (3)$$

Воспользуемся этими тождествами для того, чтобы вычислить $x^{13} + \frac{1}{x^{13}}$ при $x + \frac{1}{x} = a$. Из тождества (3) находим значения

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = a^2 - 2,$$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2 = a^4 - 4a^2 + 2.$$

Тождество (2) позволяет вычислить значение

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) = a^3 - 3a,$$

а тождество (3) — значение

$$x^6 + \frac{1}{x^6} = \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)^2 - 2 = a^6 - 6a^4 + 9a^2 - 2.$$

Используя более общее тождество (1), получаем

$$x^7 + \frac{1}{x^7} = \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) =$$
$$= (a^4 - 4a^2 + 2)(a^3 - 3a) - a = a^7 - 7a^5 + 14a^3 - 7a$$

и, наконец,

$$x^{13} + \frac{1}{x^{13}} = \left(x^7 + \frac{1}{x^7}\right)\left(x^6 + \frac{1}{x^6}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) =$$
$$= (a^7 - 7a^5 + 14a^3 - 7a)(a^6 - 6a^4 + 9a^2 - 2) - a =$$
$$= a^{13} - 13a^{11} + 65a^9 - 156a^7 + 182a^5 - 91a^3 + 13a.$$

26. Докажем следующее более сильное утверждение: если
$0^\circ < x_i < 180^\circ$ при $i = 1, 2, \ldots, n$ $(n \geqslant 2)$,
то

$$|\sin(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)| < \sin x_1 + \sin x_2 + \ldots + \sin x_n. \quad (1)$$

При доказательстве мы будем использовать известные свойства абсолютной величины суммы и произведения двух чисел: $|a + b| \leqslant |a| + |b|$, $|ab| = |a| \cdot |b|$, неравенства $|\sin x| = \sin x > 0$ и $|\cos x| < 1$, которые выполняются при $0^\circ < x < 180^\circ$, и неравенство $|\cos x| \leqslant 1$, справедливое при любом x.

Докажем наше утверждение методом математической индукции. При $n = 2$ соотношение (1) выполняется, поскольку

$$\sin(x_1 + x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2$$

и, следовательно, если x_1, x_2 принадлежат интервалу $(0^\circ, 180^\circ)$, то

$$|\sin(x_1 + x_2)| \leqslant |\sin x_1| \cdot |\cos x_2| + |\cos x_1| \cdot |\sin x_2| < \sin x_1 + \sin x_2.$$

Предположим, что соотношение (1) выполняется при некотором $k \geqslant 2$. Пусть $0^\circ < x_i < 180^\circ$ при $i = 1, 2, \ldots, k+1$.
Тогда

$$|\sin(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)| < \sin x_1 + \sin x_2 + \ldots + \sin x_k.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |\sin(x_1 + x_2 + \ldots + x_{k+1})| &= \\ &= |\sin(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)\cos x_{k+1} + \\ &+ \cos(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)\sin x_{k+1}| \leqslant \\ &\leqslant |\sin(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)|\,|\cos x_{k+1}| + \\ &+ |\cos(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)|\,|\sin x_{k+1}| \leqslant \\ &\leqslant |\sin(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)| + |\sin x_{k+1}| < \\ &< \sin x_1 + \sin x_2 + \ldots + \sin x_k + \sin x_{k+1}. \end{aligned}$$

Таким образом, соотношение (1) выполняется при любом $n \geqslant 2$. Исходное утверждение задачи также справедливо, поскольку неравенство, приведенное в условиях задачи, следует из соотношения (1).

27. Предположим, что число x удовлетворяет исход ному неравенству

$$\sqrt{x}-\sqrt{x-a}>2. \qquad (1)$$

Тогда $x \geqslant a$, и из неравенства (1) мы получаем цепочку неравенств

$$\sqrt{x}>\sqrt{x-a}+2, \qquad (2)$$

$$x>(\sqrt{x-a}+2)^2=x-a+4\sqrt{x-a}+4, \qquad (3)$$

$$\sqrt{x-a}<\frac{a-4}{4}. \qquad (4)$$

Из неравенства (4) следует, что $a>4$ и что

$$x-a<\left(\frac{a-4}{4}\right)^2, \qquad (5)$$

откуда

$$x<\left(\frac{a-4}{4}\right)^2+a, \qquad (6)$$

или

$$x<\left(\frac{a+4}{4}\right)^2. \qquad (7)$$

Итак, если число x удовлетворяет неравенству (1), то

$$a>4, \quad a \leqslant x < \left(\frac{a+4}{4}\right)^2. \qquad (8)$$

Наоборот, если условия (8) выполнены, то справедливо неравенство (1). Действительно, из неравенства (8) мы последовательно можем вывести неравенства (7), (6), (5), (4), (3), (2) и, наконец, неравенство (1).

Итак, мы пришли к следующему утверждению: числа, удовлетворяющие неравенству (1), существуют в том и только в том случае, если $a>4$. Все эти числа можно задать неравенством

$$a \leqslant x < \left(\frac{a+4}{4}\right)^2.$$

28. Равнодействующая параллельных одинаково направленных сил p_1 и p_2 проходит через некоторую точку M отрезка AB (рис. 28). Поскольку после того, как на него поместили грузики, диск остался в равновесии, то равнодействующая всех трех сил p_1, p_2, p_3 проходит

через точку O. Следовательно, точка M отлична от точки подвески O, точка приложения силы p_3 (то есть точка C) совпадает с точкой пересечения края диска с лучом MO, а сумма выпуклых углов AOB, BOC, COA равна 360°.

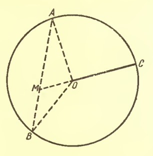


Рис. 28.

Из статики известно, что положение точки M определяется равенством

$$\frac{AM}{MB}=\frac{p_2}{p_1}. \qquad (1)$$

В треугольниках AOM и BOM выполняются соотношения

$$\frac{AM}{\sin(\angle AOM)}=\frac{OM}{\sin(\angle A)}, \quad \frac{MB}{\sin(\angle MOB)}=\frac{OM}{\sin(\angle B)},$$

а поскольку $\angle A=\angle B$, то из них следует, что

$$\frac{AM}{\sin(\angle AOM)}=\frac{MB}{\sin(\angle MOB)}. \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) получаем

$$\frac{p_2}{\sin(\angle AOM)}=\frac{p_1}{\sin(\angle MOB)},$$

а поскольку $\angle AOM=180°-\angle COA$, $\angle MOB=180°-\angle BOC$, то

$$\frac{p_1}{\sin(\angle BOC)}=\frac{p_2}{\sin(\angle COA)}.$$

Аналогичные равенства выполняются и для остальных пар искомых углов. Объединяя их, находим

$$\frac{p_1}{\sin(\angle BOC)}=\frac{p_2}{\sin(\angle COA)}=\frac{p_3}{\sin(\angle AOB)}: \qquad (3)$$

Равенства (3) уже позволяют вычислить углы BOC, COA и AOB. Действительно, пусть $\alpha = 180° - \angle BOC$, $\beta = 180° - \angle COA$, $\gamma = 180° - \angle AOB$. Поскольку $\angle BOC + \angle COA + \angle AOB = 360°$, то $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ и равенства (3) преобразуются к виду

$$\frac{p_1}{\sin\alpha} = \frac{p_2}{\sin\beta} = \frac{p_3}{\sin\gamma},$$

где α, β, γ — углы треугольника со сторонами p_1, p_2, p_3. Величину их можно вычислить, применив к этому треугольнику теорему косинусов, а углы BOC, COA, AOB — как дополнения углов α, β, γ до 180°. Действуя так, получаем

$$\begin{aligned} \cos(\angle BOC) &= \frac{p_1^2 - p_2^2 - p_3^2}{2p_2p_3}, \\ \cos(\angle COA) &= \frac{p_2^2 - p_3^2 - p_1^2}{2p_3p_1}, \\ \cos(\angle AOB) &= \frac{p_3^2 - p_1^2 - p_2^2}{2p_1p_2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Поскольку каждый из углов BOC, COA, AOB заключен между 0° и 180°, то соотношениями (4) искомые углы определены однозначно.

Примечание. В приведенном выше решении мы, следуя условиям задачи, предполагали, что диск остался в состоянии равновесия и после того, как на него поместили грузики p_1, p_2, p_3. Возникает вопрос, могут ли грузики p_1, p_2, p_3 иметь произвольный вес, то есть можно ли поместить произвольно выбранные грузики p_1, p_2, p_3 в трех точках диска так, чтобы не нарушить его равновесия? Нетрудно видеть, что это невозможно. Действительно, в приведенном выше решении мы выяснили, что числа p_1, p_2, p_3 выражают длины сторон треугольника и поэтому должны удовлетворять неравенствам

$$p_1 + p_2 > p_3, \quad p_2 + p_3 > p_1, \quad p_3 + p_1 > p_2. \tag{5}$$

Докажем, что необходимые условия (5) одновременно и достаточны для существования решения задачи. Предположим, что числа p_1, p_2, p_3 удовлетворяют неравенствам (5). Тогда существует треугольник со сторонами p_1, p_2, p_3. Если α, β, γ — углы этого треугольника, то на краю диска можно указать три различные точки A, B, C так, что $\angle BOC = 180° - \alpha$, $\angle COA = 180° - \beta$, $\angle AOB = 180° - \gamma$, поскольку $(180° - \alpha) + (180° - \beta) + (180° - \gamma) = 360°$. Следовательно, углы BOC, COA, AOB удовлетворяют равенствам (3). Поместим в точках A, B, C грузики p_1, p_2, p_3. Докажем, что при этом диск останется в состоянии равновесия. Поскольку каждый из углов BOC, COA,

AOB меньше 180°, то продолжение луча CO пересекает сторону AB треугольника AOB в некоторой точке M. Следовательно, выполняется равенство (2), а поскольку $\angle AOM = 180° - \angle COA$, $\angle MOB = 180° - \angle BOC$, то

$$\frac{AM}{\sin(\angle COA)} = \frac{MB}{\sin(\angle BOC)}. \qquad (6)$$

Из равенств (6) и (3) следует, что

$$\frac{AM}{MB} = \frac{p_2}{p_1}.$$

Это означает, что через точку M проходит равнодействующая параллельных и одинаково направленных сил p_1 и p_2, приложенных в точках A и B. Поскольку величина составляющей равна $p_1 + p_2$, нам остается лишь доказать, что через точку O проходит равнодействующая параллельных и одинаково направленных сил $p_1 + p_2$ и p_3, приложенных соответственно в точках M и C. Из равенств (3) следует, что

$$\frac{p_1 + p_2}{p_3} = \frac{\sin(\angle BOC) + \sin(\angle COA)}{\sin(\angle AOB)} =$$

$$= \frac{\sin(\angle MOB) + \sin(\angle AOM)}{\sin(\angle AOB)}. \qquad (7)$$

Применяя к треугольникам AOM, MOB и AOB теорему синусов, получаем

$$\sin(\angle MOB) = \frac{MB}{MO}\sin(\angle B),$$

$$\sin(\angle AOM) = \frac{AM}{MO}\sin(\angle A),$$

$$\sin(\angle AOB) = \frac{AB}{OA}\sin(\angle B).$$

Подставляя полученные значения синусов в соотношение (7) и учитывая, что $\angle A = \angle B$, $AM + MB = AB$, $OA = OC$, преобразуем его к виду

$$\frac{p_1 + p_2}{p_3} = \frac{OC}{MO}.$$

Это равенство означает, что равнодействующая параллельных и одинаково направленных сил $p_1 + p_2$ и p_3, приложенных в точках M и C, действительно проходит через точку O. Следовательно, равнодействующая параллельных и одинаково направленных сил p_1, p_2, p_3, приложенных соответственно в точках A, B, C, проходит через точку O, что и требовалось доказать.

29. Пусть K, L, M, N, P, Q — середины ребер тетраэдра $ABCD$ (рис. 29). Требуется доказать, что любая из прямых KL, MN, PQ (например, прямая KL) служит

осью симметрии тетраэдра и перпендикулярна любой из двух остальных прямых (например, прямой PQ).

Первое доказательство. По условиям задачи $AD = BC$ и $BD = AC$. Следовательно, треугольники ABD и ABC конгруэнтны, поскольку имеют соответственно равные стороны и медианы DK и CK этих треугольников равны. Но тогда треугольник DKC равнобедренный и его медиана KL совпадает с высотой, опу-

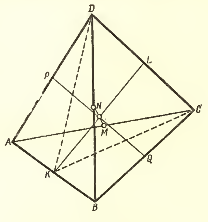


Рис. 29.

щенной из вершины K на противолежащую сторону, то есть $KL \perp DC$. Аналогичным образом можно доказать, что $KL \perp AB$.

Поскольку вершина B симметрична относительно прямой KL вершине A, а вершина C — вершине D, то прямая KL — ось симметрии тетраэдра. Отрезок BC симметричен отрезку AD, поэтому середина Q отрезка BC симметрична середине P отрезка AD. Прямая PQ проходит через точки P и Q, симметричные относительно прямой KL, пересекается с этой прямой и перпендикулярна ей, что и требовалось доказать.

Второе доказательство. Вокруг каждого тетраэдра можно описать параллелепипед, то есть построить такой параллелепипед, что диагонали его противоположных граней будут совпадать с противоположными ребрами тетраэдра (рис. 30). Если противоположные

ребра тетраэдра равны, то равны и диагонали каждой грани описанного параллелепипеда. Следовательно, грани имеют форму прямоугольников и описанный параллелепипед прямоугольный.

Известно, что прямоугольный параллелепипед обладает тремя взаимно перпендикулярными осями симметрии, проходящими через центры его противоположных

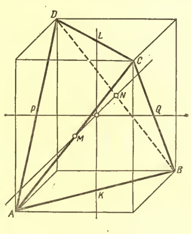


Рис. 30.

граней. Те же самые прямые служат осями симметрии тетраэдра, вписанного в прямоугольный параллелепипед, поскольку проходят через середины противоположных ребер тетраэдра и перпендикулярны этим ребрам.

30. Когда кружок катится по обручу, точки, образующие его границу, поочередно становятся точками касания кружка и обруча. По условиям задачи кружок катится по обручу без проскальзывания. Это означает, что длина дуги PQ, заключенной между двумя точками P и Q на краю кружка, равна длине дуги обруча, с точками которой поочередно совпадали при качении точки дуги PQ.

Поскольку радиус кружка в 2 раза меньше радиуса обруча, то край кружка неизменно проходит через центр O обруча.

Выберем на границе кружка некоторую точку P. Пусть в начальном положении кружка точка P совпадает с точкой A обруча (рис. 31). Когда кружок катится так, что точки касания его края с обручем заполняют четверть обруча AB, то соответствующие точки на границе кружка (то есть точки, которые поочередно становятся точками касания с обручем на дуге AB) заполняют половину окружности. Следовательно, когда

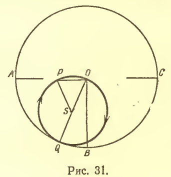


Рис. 31.

точка касания кружка и обруча совмещается с точкой B, точка P находится в центре обруча O. Докажем, что, когда точка касания описывает четверть дуги обруча AB, точка P описывает радиус AO. Для этого предположим, что в некоторый момент времени кружок касается обруча в точке Q дуги AB. Тогда центр S кружка совпадает с серединой отрезка OQ, а точка P занимает такое положение, что длины дуг AQ и PQ (каждая из которых меньше половины соответствующей окружности) равны. Следовательно,

$$\angle AOQ = \frac{1}{2} \angle PRQ. \qquad (1)$$

С другой стороны, по теореме о внешнем угле треугольника $\angle PSQ = \angle POS + \angle OPS$, а поскольку $\angle OPS = \angle POS$, то

$$\angle POS = \frac{1}{2} PSQ. \qquad (2)$$

Из соотношений (1) и (2) получаем

$$\angle POS = \angle AOQ.$$

Следовательно, точка P лежит на радиусе AO.

Наоборот, если P' — произвольная точка внутри отрезка AO, то существует такое положение кружка, при котором точка P совпадает с точкой P', при этом центр кружка находится в точке пересечения перпендикуляра, восставленного из середины отрезка OP', с дугой окружности радиуса r с центром в точке O, лежащей внутри угла AOB.

Итак, мы доказали, что когда кружок катится по четверти окружности обода AB, то точка P описывает радиус AO. При качении по дуге BC кружок занимает положения, симметричные тем, которые он занимал при качении по дуге AB относительно прямой OB. Следовательно, точка P описывает радиус OC, симметричный радиусу OA, то есть образующий вместе с радиусом AO диаметр AC обруча. При качении по остальной части обруча точка P описывает диаметр CA, поскольку занимает положения, симметричные тем, которые он занимал при качении по дуге ABC относительно прямой AC.

Итак, мы приходим к следующему заключению: при качении кружка по внутренней стороне обруча вдвое большего радиуса каждая точка на границе кружка описывает определенный диаметр обруча.

31. Если многочлен $W(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ представи́м в виде $U^2(x) - V^2(x)$, где $U(x)$ и $V(x)$ — многочлены неодинаковых степеней, то многочлен $U(x)$ должен быть второй степени, а многочлен $V(x)$ — первой или нулевой степени. Следовательно, многочлен $V^2(x)$ не содержит членов выше второй степени, в силу чего два старших члена в многочлене $U^2(x)$ должны совпадать с двумя старшими членами исходного многочлена $W(x)$, то есть $U^2(x)$ имеет вид $x^4 + x^3 + \ldots$. Но тогда $U(x)$ представи́м в виде $U(x) = x^2 + \frac{1}{2}x + a$. Зная $U(x)$, находим $V^2(x)$:

$$V^2(x) = U^2(x) - W(x) = \left(x^2 + \frac{1}{2}x + a\right)^2 -$$

$$-(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = \left(2a - \frac{3}{4}\right)x^2 + (a-1)x + a^2 - 1.$$

Из выражения, полученного для $V^2(x)$, видно, что $V(x)$ не может иметь нулевую степень, поскольку равен-

ства $2a-\frac{3}{4}=0$ и $a-1=0$ не могут выполняться одновременно. Следовательно, $V(x)$ должен быть многочленом первой степени. Это означает, что $V^2(x)$ — квадратный трехчлен с положительным коэффициентом при x^2 и нулевым дискриминантом:

$$2a-\frac{3}{4}>0, \quad (a-1)^2-4\left(2a-\frac{3}{4}\right)(a^2-1)=0.$$

Второе условие после упрощения приводит к уравнению

$$(a-1)(4a^2+2a-1)=0,$$

имеющему 3 корня: $a=1$ и $a=\frac{1}{4}(-1\pm\sqrt{5})$. Условию $2a-\frac{3}{4}>0$ удовлетворяет лишь корень $a=1$.

Итак, исходный многочлен допускает разложение

$$x^4+x^3+x^2+x+1=\left(x^2+\frac{1}{2}x+1\right)^2-\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}\,x\right)^2.$$

Решение задачи единственно.

32. Условия задачи можно сформулировать несколько иначе. Найти необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять вещественные числа a, b, c для того, чтобы существовали числа x_1 и q, обладающие следующими свойствами:

а) числа x_1, x_1q, x_1q^2 удовлетворяют исходному уравнению (1);

б) x_1 и q — вещественные числа;

в) $x_1\neq 0$;

г) $q\neq 0$, $q\neq 1$, $q\neq -1$.

Займемся сначала отысканием необходимых условий.

Если числа x_1 и q обладают свойством (а), то выполняются соотношения Виета

$$\begin{cases} x_1+x_1q+x_1q^2=-a, \\ x_1^2q+x_1^2q^2+x_1^2q^3=b, \\ x_1^3q^3=-c. \end{cases} \tag{2}$$

Обозначив для краткости через m то (единственное) вещественное число, для которого $m^3=-c$, заменим

систему соотношений (2) системой

$$\begin{cases} x_1(1+q+q^2) = -a, \\ x_1^2 q(1+q+q^2) = b, \\ x_1 q = m. \end{cases} \tag{3}$$

Эта система эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} x_1(1+q+q^2) = -a, \\ ax_1 q + b = 0, \\ x_1 q = m. \end{cases} \tag{4}$$

Из второго и третьего соотношений системы (4) следует, что

$$b = -am. \tag{α}$$

Итак, мы получили первое необходимое условие для коэффициентов исходного уравнения (1). Если это условие выполнено, система соотношений (4) эквивалентна системе

$$\begin{cases} x_1(1+q+q^2) = -a, \\ x_1 q = m. \end{cases} \tag{5}$$

Заменив в первом из соотношений (5) $x_1 q$ величиной m, получим эквивалентную систему

$$\begin{cases} x_1 + mq = -a - m, \\ x_1 q = m. \end{cases} \tag{6}$$

Обратившись к свойствам (в) и (г) чисел x_1 и q, мы увидим, что следующее необходимое условие, которому должны удовлетворять коэффициенты a, b, c, имеет вид неравенства

$$m \neq 0. \tag{β}$$

Исключив x_1 из соотношений (6), получим уравнение

$$mq^2 + (m+a)q + m = 0. \tag{7}$$

Для того, чтобы уравнение (7) имело вещественные корни — свойство (б), — помимо неравенства $m \neq 0$ должно выполняться условие

$$a^2 + 2am - 3m^2 \geqslant 0. \tag{γ}$$

Поскольку — свойство (г) — $q \neq 1$ и $q \neq -1$, то из уравнения (7) мы получаем еще два необходимых условия, которым должны удовлетворять коэффициенты a, b, c:

$$a \neq -3m, \qquad (\delta)$$

$$a \neq m. \qquad (\varepsilon)$$

Однако следует иметь в виду, что при $a = -3m$ и $a = m$ трехчлен $a^2 + 2am - 3m^2$ обращается в нуль. Это позволяет заменить условия (γ), (δ) и (ε) одним условием

$$a^2 + 2am - 3m^2 > 0. \qquad (\eta)$$

Итак, мы получили 3 необходимых условия (α), (β), (η), которым должны удовлетворять коэффициенты a, b, c уравнения (1).

Докажем, что эти условия являются и достаточными, то есть что если выполняются условия (α), (β) и (η), то существуют числа x_1 и q, обладающие свойствами (а), (б), (в) и (г).

Действительно, в силу условий (β) и (η) уравнение (7) имеет два вещественных корня. Пусть q — один из них (тогда другой корень равен $1/q$). По условию (β) $q \neq 0$, а по условию (η) $q \neq 1$ и $q \neq -1$. Тогда из второго соотношения системы (6) получаем $x_1 = m/q$, причем x_1 — вещественное число, удовлетворяющее первому соотношению системы (6). Кроме того, по условию (β) $x_1 \neq 0$. Если условие (α) выполнено, то система соотношений (6) эквивалентна системе соотношений (2). Таким образом, найденные значения x_1 и q удовлетворяют соотношениям (2) и, следовательно, обладают свойством (а).

Условие (η) означает, что число m заключено между a и $-a/3$. Поскольку $m^3 = -c$, то условия (α), (β), (η) можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} b^3 = a^3 c, \\ c \neq 0, \\ c \text{ заключено между } -a^3 \text{ и } \frac{a^3}{27}. \end{cases} \qquad (\text{У})$$

Совокупность условий (У) служит ответом на вопрос задачи.

33. Семь натуральных чисел, образующих арифметическую прогрессию с разностью 30, можно записать в виде a, $a + 30$, $a + 2 \cdot 30$, ..., $a + 6 \cdot 30$.

Разность любых двух из этих чисел представима в виде

$$r = (a + k \cdot 30) - (a + m \cdot 30) = (k - m) \cdot 30,$$

где k и m — целые числа, причем $0 \leqslant k \leqslant 6$, $0 \leqslant m \leqslant 6$, $k \neq m$, откуда $-6 \leqslant k - m \leqslant 6$ и $k - m \neq 0$.

Число $(k - m) \cdot 30$ не делится на 7, если множитель $k - m$ не делится на 7, поскольку множитель 30 взаимно прост с числом 7. К такому выводу нас приводит фундаментальное утверждение теории чисел, гласящее: «Если произведение ab целых чисел делится на целое число c, взаимно простое с множителем b, то множитель a делится на c».

Следовательно, каждое из семи чисел $a + k \cdot 30$, $k = 0, 1, \ldots, 6$ при делении на 7 дает остаток, отличный от остатка, даваемого другими числами, и поэтому одно и только одно из них дает остаток, равный нулю, что и требовалось доказать.

Аналогичным образом можно доказать и более общее утверждение: среди n целых чисел, образующих арифметическую прогрессию с разностью, взаимно простой с числом n, одно и только одно число делится на n.

34. Рассмотрим треугольники APB и APC. Возможны следующие 3 случая.

а. Площадь каждого из треугольников APB и APC меньше половины площади треугольника ABC. Так происходит, когда расстояния от точки P до прямых AB и AC меньше половины соответствующих высот треугольника ABC, то есть если точка P лежит внутри параллелограмма $AFDE$, вершины которого F, D, E совпадают с серединами сторон AB, BC и CA треугольника ABC (рис. 32).

Если точка P лежит на той диагонали AD параллелограмма, которая служит медианой треугольника ABC, то искомая точка Q совпадает с точкой D.

Пусть точка P лежит внутри одного из треугольников AFD и AED, например внутри треугольника AFD. Если ломаная APQ удовлетворяет условиям задачи, то точка Q лежит внутри отрезка CD, а отрезок PQ пере-

секается с медианой AD в некоторой точке S. Тогда площадь четырехугольника $ABQP$ равна площади треугольника ABD, поэтому площадь треугольника ASP равна площади треугольника QSD, и, следовательно, площади треугольников APD и QPD равны. Отсюда мы заключаем, что прямая AQ параллельна прямой PD.

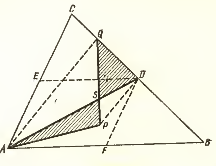


Рис. 32.

Таким образом, в рассматриваемом случае искомую точку Q мы получим как точку пересечения луча, проведенного из вершины A параллельно прямой PD, с отрезком DC. Такая точка пересечения всегда существует, поскольку луч, параллельный прямой PD, лежит внутри угла DAC.

б. Площадь одного из треугольников APB и APC, например треугольника APB, равна половине площади треугольника ABC. В этом случае решением задачи служит ломаная APB.

в. Площадь одного из треугольников APB и APC, например площадь треугольника APB, больше половины площади треугольника ABC. Так происходит, когда точка P лежит внутри треугольника EDC (рис. 33).

Если ломаная APQ удовлетворяет условиям задачи, то точка Q лежит на стороне AB и не совпадает с вершинами A и B, а отрезок PQ пересекается с отрезком AD в некоторой точке S. В этом случае площадь треугольника AQP равна площади треугольника ABD, а потому площадь треугольника ASP равна площади четырехугольника $SQBD$. Проведем через вершину B

прямую, параллельную диагонали QD четырехугольника $SQBD$. Она пересечет продолжение стороны SD в некоторой точке G. Тогда площади треугольников QDG и QDB равны, площадь четырехугольника $SQBD$ равна площади треугольника SQG, и, следовательно, треугольник ASP равновелик треугольнику SQG, а треугольник APG — треугольнику QPG. Это означает, что прямая PG параллельна прямой AB. Таким образом,

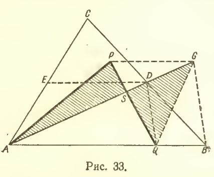


Рис. 33.

построение ломаной APQ сводится к следующему. Проведем через точку P прямую, параллельную прямой AB, до пересечения в точке G с продолжением отрезка AD, а затем через точку D проведем прямую, параллельную прямой GB. Эта прямая пересекается с отрезком AB в точке Q, которую и требовалось найти. Действительно,

$$S_{APQ} = S_{ASQ} + S_{APS} = S_{ASQ} + S_{SQG} =$$
$$= S_{ASQ} + S_{SQBD} = S_{ABD} = \frac{1}{2} S_{ABC}.$$

35. Пусть точка B' симметрична точке B относительно прямой m. Если P — произвольно выбранная точка прямой m, то

$$|AP - BP| = |AP - BP'| \leqslant AB'.$$

В зависимости от положения точек A и B относительно прямой m возможен один из трех случаев.

а. Точки A и B находятся на различных расстояниях от прямой m. Тогда точка B' отлична от точки A и прямая AB' пересекает прямую m в некоторой точке M (рис. 34), лежащей внутри отрезка AB', в силу чего

$|AM - B'M| = AB'$ и $|AM - BM| = AB'$. Для любой точки прямой m, отличной от M, разность расстояний от нее до точек A и B меньше AB'. Следовательно, точка M — единственное решение задачи. Прямая m совпадает с биссектрисой угла AMB.

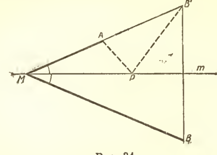


Рис. 34.

б. Точки A и B равноудалены от прямой m, но расположены несимметрично относительно m. В этом случае точка B' отлична от точки A, а прямая AB' параллельна прямой m. Для любой точки P прямой m выполняется неравенство

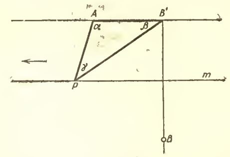


Рис. 35.

$$|AP - B'P| < AB'.$$

Докажем, что на прямой m не существует такой точки, для которой разность расстояний до точек A и B была бы наибольшей.

Пусть α, β, γ — углы треугольника $AB'P$ (рис. 35).

Применяя к треугольнику $AB'P$ теорему синусов, получаем

$$\frac{B'P - AP}{AB'} = \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\gamma}.$$

Поскольку

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\sin\gamma = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}, \quad \sin\frac{\gamma}{2} = \cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

то это равенство преобразуется к виду

$$\frac{B'P - AP}{AB'} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Когда точка P удаляется в бесконечность по прямой m в направлении, согласующемся с направлением вектора $\overrightarrow{B'A}$, то значение правой части последнего равенства стремится к 1, поскольку $\alpha \to 180°$, $\beta \to 0°$, $\gamma \to 0°$. Следовательно, разность $B'P - AP$ стремится к AB'.

Итак, мы выяснили, что длина отрезка AB' служит верхней гранью разности $|AP - BP|$, которой разность никогда не достигает. Это означает, что в случае б задача не имеет решения.

в. Точки A и B расположены симметрично относительно прямой m, точка B' совпадает с точкой A.

В этом случае для любой точки P прямой m выполняется равенство $AP - BP = 0$ и любая такая точка является решением задачи.

36. Проведем через точку A прямую p, параллельную прямой m, а через точку C — прямую, параллельную прямой AB. Обозначим через E точку пересечения этой прямой с прямой p. Пусть σ означает сферу, проходящую через точки A, B, C, D. Поскольку точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости (прямые m и n скрещиваются), то такая сфера существует и притом только одна. Четырехугольник $ABCE$ представляет собой прямоугольник, поскольку прямые AB и CE перпендикулярны прямым m и p. Три вершины A, B и C этого прямоугольника лежат на сфере σ. Следовательно, четвертая его вершина E также лежит на сфере σ. Сфера σ пересекается с плоскостью прямых n и p по окружно-

сти, проходящей через точки A, D, E. Таким образом, центр S этой окружности есть центр описанной окружности треугольника ADE. Центр O сферы σ лежит на прямой, перпендикулярной в точке S плоскости ADE и поэтому параллельной прямой AB (поскольку $AB \perp n$ и $AB \perp p$). С другой стороны, точка O как равноудаленная от точек A и B лежит в плоскости, проходящей через середину отрезка AB перпендикулярно ему, в силу чего расстояние OS от точки O до плоскости ADE равно $\frac{1}{2}AB$. Таким образом, точку O мы найдем, проведя через точку S прямую, параллельную прямой AB, и отложив на ней отрезок $SO = \frac{1}{2}d$ в направлении от A к B.

Рассмотрим треугольник ASO. Угол при вершине S — прямой, гипотенуза OA равна радиусу r сферы σ, который требуется вычислить, $OS = \frac{1}{2}d$, а катет SA равен радиусу описанной окружности треугольника ADE. Следовательно, $SA = DE/2\sin(\angle DAE)$. Но из прямоугольного треугольника DEC (отрезок CE перпендикулярен плоскости ADE) получаем $DE^2 = DC^2 - EC^2 = l^2 - d^2$, а угол DAE равен углу φ между скрещивающимися прямыми m и n, поэтому $SA = \sqrt{l^2 - d^2}/2\sin\varphi$.

Поскольку стороны треугольника ASO удовлетворяют соотношению $OA^2 = SO^2 + SA^2$, то

$$r^2 = \frac{d^2}{4} + \frac{l^2 - d^2}{4\sin^2\varphi} = \frac{l^2 - d^2\cos^2\varphi}{4\sin^2\varphi},$$

$$r = \frac{\sqrt{l^2 - d^2\cos^2\varphi}}{2\sin\varphi}.$$

Заметим, что при заданных точках A и B и прямых m и n существует бесконечно много отрезков CD длины $l > d\cos\varphi$ (которая также задана) с концами, лежащими на прямых m и n. Следовательно, существует бесконечно много сфер, проходящих через точки A и B и пересекающих прямые m и n в таких точках C и D, что $CD = l$. Как показывает решение нашей задачи, радиусы всех таких сфер равны.

Иллюстрацией к приведенным выше рассуждениям служит рис. 36, на котором рассмотренная нами конфигурация изображена в ортогональной проекции на

плоскость, содержащую взаимно перпендикулярные прямые AB и AD, в силу чего точки A, B, C и D на проекции выбраны так, что $AB \perp AD$. Точка S на рис. 36 определена следующим образом (пунктирные линии).

Совместим треугольник ADE с плоскостью рисунка, то есть с плоскостью ABD. Для этого повернем плоскость ADE вокруг прямой n так, чтобы точка E совпала

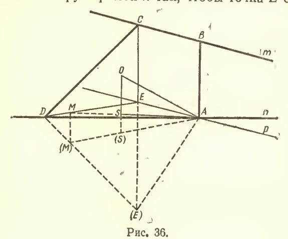


Рис. 36.

с некоторой точкой (E) рисунка. При таком повороте ортогональная проекция каждой точки плоскости ADE движется по прямой, перпендикулярной прямой n. Точку (E) мы найдем, построив точку пересечения перпендикуляра, опущенного из точки E на прямую n, и луча, проведенного из точки A и образующего с лучом AD угол φ.

Пусть (S) — центр описанной окружности треугольника $AD(E)$ и (M) — точка пересечения прямых $A(S)$ и $D(E)$. Продолжив перпендикуляр, опущенный из точки (M) на прямую n, до пересечения в точке M с прямой DE и опустив на прямую n перпендикуляр из точки (S), найдем точку S как точку пересечения этого перпендикуляра с прямой AM.

37. Из отрезков длиной a, b, c треугольник можно построить в том и только в том случае, если

$$a+b-c>0, \quad b+c-a>0, \quad c+a-b>0. \qquad (2)$$

Требуется доказать, что если числа a, b, c удовлетворяют неравенству (1) из условий задачи и положительны (как длины отрезков), то выполняются неравенства (2), и наоборот. Для этого необходимо преобразовать неравенство (1). Записав его в виде

$$a^4 - 2(b^2 + c^2)a^2 + (b^2 - c^2)^2 < 0, \qquad (3)$$

получим в левой части квадратный трехчлен относительно a^2. Корни этого трехчлена мы найдем по формуле

$$a^2 = (b^2 + c^2) \pm \sqrt{(b^2 + c^2)^2 - (b^2 - c^2)^2} = \\ = (b^2 + c^2) \pm 2bc = (b \pm c)^2.$$

Зная их, неравенство (3) можно записать в виде

$$[a^2 - (b + c)^2][a^2 - (b - c)^2] < 0,$$

или

$$(a + b + c)(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c) < 0.$$

Наконец, изменив знак второго множителя в левой части, получим неравенство

$$(a + b + c)(b + c - a)(a + b - c)(a + c - b) > 0. \qquad (4)$$

Если числа a, b, c удовлетворяют неравенству (1), а значит, и неравенству (4) и положительны, то $a + b + c > 0$. Следовательно, либо остальные три множителя в левой части неравенства (4) положительны, то есть выполняются неравенства (2), либо один из этих множителей положителен, а два других отрицательны. Второй случай невозможен, поскольку если бы, например, выполнялись неравенства $b + c - a < 0$, $a + b - c < 0$, то при сложении их левых и правых частей в отдельности мы получили бы неравенство $2b < 0$, из которого вопреки исходному предположению следовало бы, что $b < 0$.

Таким образом, из неравенства (1) и условий $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ мы получаем неравенства (2).

Наоборот, если числа a, b, c удовлетворяют неравенствам (2), то они удовлетворяют неравенству (1) и положительны. Действительно, при сложении в отдельности левых и правых частей, например двух первых неравенств (2), мы приходим к неравенству $2b > 0$, или $b > 0$. Аналогичным образом получаются и неравенства

$a > 0$, $c > 0$, в силу чего $a + b + c > 0$. Следовательно, все множители в левой части неравенства (4) положительны и неравенство (4) выполняется. Но тогда выполняется и эквивалентное ему неравенство (1).

Примечаиие. Нетрудно убедиться в том, что еслн числа a, b, c удовлетворяют иеравенству (1), то ни одно из них ие равно нулю. Это означает, что доказанное выше утверждение можно было бы сформулировать следующим образом: неотрицательные числа a, b, c могут быть длииами сторон треугольника в том и только в том случае, если выполняется неравенство (1).

38. Из условия (1) следует, что $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $a + b + c \neq 0$.

Преобразуем равенство (1). Перенесем выражение $1/(a + b + c)$ в левую часть и умножим обе части получившегося равенства на $abc(a + b + c)$:

$$(a + b + c)\,bc + (a + b + c)\,ac + (a + b + c)\,ab - abc = 0.$$

Раскрыв скобки и расположив все члены в левой части равенства по степеням a, получим

$$a^2 (b + c) + a (b + c)^2 + bc (b + c) = 0,$$
$$(b + c)[a^2 + a(b + c) + bc] = 0$$

и, наконец,

$$(b + c)(c + a)(a + b) = 0. \qquad (3)$$

Из равенства (3) следует, что два из трех чисел a, b, c равны по абсолютной величине, но имеют противоположные знаки. Пусть, например, $b = -a$. Тогда $b^n = -a^n$ при любом нечетном n, и равенство (2), принимающее вид $1/c^n = 1/c^n$, выполняется.

Прнмечанне. Аналогичным образом можно доказать и более общее утверждение: если равенство (2) выполняется при иекотором значении нечетного показателя степени n, то оно выполняется прн любом нечетном n.

39. а) При делении на 3 квадрат целого числа дает остаток 0, а если число делится на 3, и остаток 1, если число не делится на 3. Если бы ни a, ни b не делились на 3, то остаток от деления числа $a^2 + b^2$ на 3 был бы равен 2, что в силу приведенного выше замечания невозможно, поскольку сумма $a^2 + b^2$ равна квадрату целого числа c. Следовательно, по крайней мере одно из чисел a и b делится на 3.

б) Предположим сначала, что a, b, c — взаимно простые числа, то есть не имеют общего делителя, который был бы больше 1.

Тогда a, b — также взаимно простые числа. Действительно, если бы какое-нибудь простое число p было бы общим делителем чисел a и b, то в силу

$$a^2+b^2=c^2 \qquad (1)$$

число p было бы делителем и числа c^2 и, следовательно, числа c вопреки предположению о том, что a, b, c — взаимно простые числа.

Числа a и b не могут быть оба четными, поскольку они взаимно простые. Докажем, что они не могут быть и оба нечетными. Действительно, если бы $a=2k+1$, $b=2l+1$, то при делении на 4 число $a^2+b^2=4(k^2+l^2)+4(k+l)+2$ давало бы остаток 2, в то время как число c^2 при делении на 4 может давать лишь остаток 0 или 1. Следовательно, одно из чисел a и b четно, а другое нечетно. В этом случае число c нечетно.

Предположим, например, что b — нечетное, а a — четное число. Из соотношения (1) получаем

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{c+b}{2}\cdot\frac{c-b}{2}.$$

Поскольку числа b и c нечетны, то $(c+b)/2$ и $(c-b)/2$ — целые числа. Их сумма равна нечетному числу c. Следовательно, одно из чисел $(c+b)/2$, $(c-b)/2$ четно, а другое нечетно и их произведение, равное $(a/2)^2$, — четное число. Отсюда мы заключаем, что $a/2$ — четное число, то есть a делится на 4.

Остается рассмотреть случай, когда числа a, b и c имеют наибольший общий делитель $d>1$. Тогда $a=da_1$, $b=db_1$, $c=dc_1$, причем a_1, b_1, c_1 — целые взаимно простые числа. Из соотношения (1) получаем: $d^2a_1^2+d^2b_1^2=d^2c_1^2$, откуда $a_1^2+b_1^2=c_1^2$. Согласно предыдущему рассуждению в рассматриваемом случае одно из чисел a_1 и b_1, например a_1, делится на 4. Тогда и число $a=da_1$ также делится на 4.

Итак, мы доказали, что если числа a, b, c удовлетворяют соотношению (1), то по крайней мере одно из чисел a и b делится на 4.

в) Число, не делящееся на 5, можно представить либо в виде $5k\pm1$, либо в виде $5k\pm2$. Поскольку

$(5k^2 \pm 1)^2 = 25k^2 \pm 10k + 1$, $(5k \pm 2)^2 = 25k^2 \pm 20k + 4$, то квадрат числа, не делящегося на 5, при делении на 5 дает остаток 1 или 4. Если ни a, ни b не делятся на 5, то остаток от деления $a^2 + b^2$ может быть равен лишь $1 + 1 = 2$, $(1 + 4) - 5 = 0$, $(4 + 4) - 5 = 3$. С другой стороны, сумма $a^2 + b^2$ равна c^2 и, следовательно, при делении на 5 может дать остаток только 0, 1 или 4. Таким образом, в рассматриваемом случае остаток от деления $a^2 + b^2 = c^2$ на 5 может быть равен только 0. Это означает, что c^2, а значит и c, делится на 5.

Итак, по крайней мере одно из целых чисел a, b, c, удовлетворяющих соотношению (1), делится на 5.

40. Пусть ABC — прямоугольный треугольник ($\angle C = 90°$), который требуется построить. Поскольку точки M, D, H попарно различны, катеты AC и BC не равны.

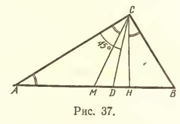


Рис. 37.

Пусть, например, $AC > BC$. Тогда точка D лежит между точками M и B, а точка H — между точками D и B. Следовательно, точка D расположена между точками M и H (рис. 37).

Поскольку

$$\angle MCD = \angle ACD - \angle ACM = 45° - \angle A,$$

а

$$\angle DCH = \angle ACH - \angle ACD = 90° - \angle A - 45° = 45° - \angle A,$$

то CD — биссектриса угла при вершине C треугольника MCH. Отсюда мы заключаем, что $MD > DH$, поскольку $MD : DH = MC : CH$, а $MC > CH$. К тем же результатам приводит и предположение о том, что $AC < BC$.

Итак, задача имеет решение лишь в том случае, если точки M, D, H расположены так, что точка D лежит между точками M и H, причем $MD > DH$. Эти условия

не только необходимы, но и достаточны. Действительно, вершину C мы найдем как точку пересечения окружности Аполлония для отрезка MH и отношения $MD:DH$ с перпендикуляром, восставленным к прямой MH в точке H, лежащей внутри окружности. Остальные вершины треугольника мы найдем, отложив на прямой MH по обе стороны от точки M отрезки $MA = MC$ и $MB = MC$. Выполнив построение, мы получим треугольник ABC, удовлетворяющий условиям задачи. Действительно, треугольник ABC прямоугольный, поскольку его вершина C лежит на окружности с диаметром AB, CM — его медиана, CH — высота. Наконец, CD — биссектриса угла C, поскольку $\angle ACD = \angle ACM + \angle MCD = \angle A + \angle MCD = \angle BCH + \angle HCD = \angle BCD$.

Задача имеет в плоскости рисунка два решения, симметричных относительно заданной прямой MH.

41. Пусть W — многоугольник с периметром $2a$. Выберем на границе многоугольника две точки A и B, делящие периметр на половины, то есть на две части длиной a. Тогда $AB < a$ (рис. 38).

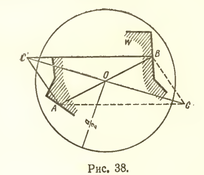


Рис. 38.

Докажем, что кружок радиусом $a/2$ с центром в середине O отрезка AB полностью накрывает многоугольник W.

Воспользуемся рассуждениями от противного. Предположим, что кружок не накрывает многоугольник W. Тогда часть многоугольника W выступает за границу кружка. Следовательно, существует такая точка C на границе многоугольника, что $OC > a/2$. C отлична от

точек A и B, поскольку $OA = OB < a/2$, и поэтому разбивает одну из половин периметра, разделенных точками A и B, на две части. Пусть p — длина той части, концами которой служат точки A и C, а q — длина части с концами в точках C и B. Ясно, что $p + q = a$. Поскольку $p \geqslant AC$ и $q \geqslant CB$, то

$$a = p + q \geqslant AC + CB. \qquad (1)$$

Пусть C' — точка, симметричная точке C относительно точки O. Поскольку точке B относительно точки O симметрична точка A, то $BC = AC'$ и поэтому

$$AC + CB = AC + AC' \geqslant CC' = 2OC > a,$$

или

$$a < AC + CB. \qquad (2)$$

Из неравенств (1) и (2) получаем противоречие: $a > a$. Следовательно, предположение о том, что кружок не накрывает многоугольник W, ложно. Тем самым утверждение задачи, противоположное принятому предположению, доказано.

Примечание 1. На рис. 38 точка C лежит вне прямой AB, однако приведенные выше рассуждения остаются в силе и в том случае, когда точки A, B и C лежат на одной прямой.

Примечание 2. Если диаметр кружка меньше a (и равен, например, $a - d$, где $0 < d < a$), то таким кружком можно накрыть не всякий многоугольник диаметром $2a$. Например, им нельзя накрыть треугольник со сторонами

$$a - \frac{d}{2}, \quad \frac{a}{2} + \frac{d}{4}, \quad \frac{a}{2} + \frac{d}{4},$$

поскольку $a - d/2 > a - d$.

Примечание 3. Справедливо более общее утверждение: кружком диаметром a можно накрыть любой участок плоскости, ограниченный произвольной кривой длиной $2a$.

Это утверждение доказывается так же, как и утверждение задачи.

42. Задача сводится к задаче из планиметрии. Выберем на плоскости α точку S, отличную от основания S_0 перпендикуляра, опущенного из центра O сферы на α (рис. 39).

Плоскость S_0OS перпендикулярна плоскости α, пересекается с α по прямой p, с заданной сферой — по ок-

ружности k радиусом R и с конусом, касающимся сферы, с вершиной в точке S — по паре касательных SM и SN к окружности k. Центр окружности, по которой конус касается сферы, совпадает с серединой C хорды MN. Когда точка S пробегает прямую p, точка C описывает некоторую линию l. Геометрическим местом точек C в пространстве служит поверхность, образующаяся при вращении линии l вокруг прямой OS_O. Итак, решение задачи сводится к отысканию линии l.

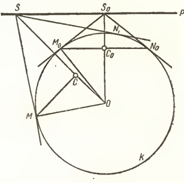


Рис. 39.

Чтобы найти ее, проведем из точки S_O касательные S_OM_O и S_ON_O к окружности k. Пусть C_O — середина хорды M_ON_O. Элементы прямоугольных треугольников OMS и OM_OS_O удовлетворяют соотношениям

$$OC \cdot OS = OM^2 = R^2,$$

$$OC_O \cdot OS_O = OM_O^2 = R^2,$$

откуда

$$OC \cdot OS = OC_O \cdot OS_O, \quad \frac{OC}{OC_O} = \frac{OS_O}{OS}$$

и

$$\frac{OC}{OC_O} = \cos(\angle SOS_O) = \cos(\angle COC_O),$$

$$OC = OC_O \cos(\angle COC_O).$$

Следовательно, точка C есть основание перпендикуляра, опущенного из точки C_O на прямую OS, то есть угол

OCC_0 — прямой. Когда точка S описывает прямую p, точка C движется по окружности с диаметром OC_0, причем пробегает все точки этой окружности за исключением точки O. Таким образом, геометрическое место точек C в плоскости окружности k представляет собой окружность с диаметром OC_0, из которой выколота точка O, а геометрическое место точек C в пространстве — сфера с диаметром OC_0, из которой выколота точка O.

Примечание 1. Из соотношения $OC = R^2/OS$ следует, что точка C — образ точки S при инверсии относительно окружности k. Решение задачи следует непосредственно из теоремы о том, что образом прямой при инверсии служит проходящая через центр O инверсии окружность с выколотой точкой O.

Примечание 2. Аналогичную задачу можно поставить и для случая, когда плоскость α пересекается с заданной сферой или касается ее. Способ решения остается таким же, как и в рассмотренном нами случае.

43. Пусть x — число, которое требуется найти. Тогда

$$x = 1000a + 100a + 10b + b,$$

где a и b — целые числа, удовлетворяющие неравенствам $0 < a \leqslant 9$, $0 \leqslant b \leqslant 9$. Число x делится на 11, поскольку

$$x = 1100a + 11b = 11(100a + b).$$

По условиям задачи x — квадрат целого числа. Следовательно, если число x делится на 11, то оно делится и на 11^2, поэтому число

$$100a + b = 99a + (a + b)$$

делится на 11. Но тогда $a + b$ делится на 11, а поскольку $0 < a + b \leqslant 18$, то $a + b = 11$. Таким образом,

$$x = 11^2(9a + 1).$$

Из этого разложения видно, что $9a + 1$ — квадрат некоторого натурального числа m:

$$9a + 1 = m^2. \qquad (*)$$

Поскольку $9a + 1 \leqslant 82$, то $m \leqslant 9$.

Равенство (*) можно представить в виде

$$9a = (m + 1)(m - 1).$$

Из этого равенства следует, что произведение $(m \mp 1) \times \times (m - 1)$ делится на 9, а поскольку на 3 делится не более чем одно из чисел $m - 1$, $m + 1$, то одно из них делится на 9. Учитывая, что натуральное число m меньше 10, получаем $m + 1 = 9$, откуда $m = 8$. Итак, $a = 7$, $b = 4$ и число, о котором говорится в условиях задачи, равно $7744 = (88)^2$.

44. Пусть

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = w$$

(по условиям задачи w — рациональное число). Тогда

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = w - \sqrt{z}.$$

Возводя правую и левую части этого равенства в квадрат, получаем

$$x + y + 2\sqrt{xy} = w^2 - 2w\sqrt{z} + z,$$

откуда

$$2\sqrt{xy} = w^2 + z - x - y - 2w\sqrt{z}. \qquad (1)$$

Возводя еще раз обе части равенства (1) в квадрат, получаем

$$4xy = (w^2 + z - x - y)^2 + 4w^2z - 4w(w^2 + z - x - y)\sqrt{z},$$

откуда

$$4w(w^2 + z - x - y)\sqrt{z} = (w^2 + z - x - y)^2 + 4w^2z - 4xy. \qquad (2)$$

При $w(w^2 + z - x - y) \neq 0$ из равенства (2) следует, что

$$\sqrt{z} = \frac{(w^2 + z - x - y)^2 + 4w^2z - 4xy}{4w(w^2 + z - x - y)}.$$

Таким образом, в этом случае $\sqrt{z}$ — рациональное число.

При $w(w^2 + z - x - y) = 0$ возможен один из следующих случаев.

а) Если $w = 0$, то $\sqrt{x} = \sqrt{y} = \sqrt{z} = 0$.

б) Если $w \neq 0$, то $w^2 + z - x - y = 0$. Тогда из равенства (1) получаем: $2\sqrt{xy} = -2w\sqrt{z}$. Поскольку числа $2\sqrt{xy}$ и $2w\sqrt{z}$ неотрицательны, то из последнего

равенства следует, что они равны нулю, то есть $2w\sqrt{z}=0$. Но $w\neq 0$, поэтому $\sqrt{z}=0$.

Итак, мы доказали, что $\sqrt{z}$ — рациональное число. Аналогичным образом можно убедиться в том, что $\sqrt{x}$ и $\sqrt{y}$ — также рациональные числа. К этому заключению приводит симметрия выражения $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$.

Примечание. Справедливо общее утверждение: если x_1, $x_2, \ldots, x_n$ и $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\ldots+\sqrt{x_n}$ — рациональные числа, то числа $\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, \ldots, \sqrt{x_n}$ — также рациональны.

45. Предположим, что если x — целое число, то $f(x)=ax^2+bx+c$ — также целое число. Тогда

1) $f(0)=c$, следовательно, c — целое число;

2) $f(1)=a+b+c$, откуда $a+b=f(1)-c$, следовательно, $a+b$ — целое число;

3) $f(2)=4a+2b+c$, откуда $2a=f(2)-2(a+b)-c$, следовательно, $2a$ — целое число.

Наоборот, если $2a$, $a+b$ и c — целые числа, то квадратный трехчлен ax^2+bx+c при любом целом x принимает целые значения. Действительно,

$$ax^2+bx+c=ax^2-ax+ax+bx+c=$$
$$=ax(x-1)+(a+b)x+c=2a\cdot\frac{x(x-1)}{2}+(a+b)x+c.$$

Число $x(x-1)/2$ целое, поскольку числитель $x(x-1)$ как произведение двух последовательных целых чисел четен. Таким образом, значение ax^2+bx+c представимо в виде суммы трех целых чисел и, следовательно, целое.

Примечание. Нетрудно доказать, что многочлен ax^3+bx^2+cx+d принимает целые значения при любом целом x в том и только в том случае, если $6a$, $2b$, $a+b+c$ и d — целые числа.

46. Предположим, что выпуклый четырехугольник $ABCD$ (рис. 40) удовлетворяет условиям задачи.

1) Поскольку по условиям задачи в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность, то суммы противолежащих сторон четырехугольника равны:

$$AB+DC=AD+BC. \qquad (1)$$

2) Кроме того, по условиям задачи существует окружность, касательная к продолжениям сторон четырех-

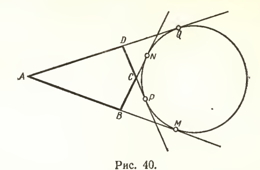


Рис. 40.

угольника $ABCD$. Это означает, что (в обозначениях, принятых на рис. 40) выполняются соотношения

$$\begin{cases} AB = AM - BM, \\ BC = BN - CN, \\ DC = DP - CP, \\ AD = AQ - DQ. \end{cases} \quad (2)$$

Из соотношений (2) получаем

$$AB - DC = AM - BM - DP + CP,$$
$$AD - BC = AQ - DQ - BN + CN,$$

а поскольку по известной теореме о касательных к окружности

$$AM = AQ, \quad BM = BN, \quad CN = CP, \quad DP = DQ,$$

то

$$AB - DC = AD - BC. \quad (3)$$

Складывая и вычитая отдельно левые и правые стороны соотношений (1) и (3), находим:

$$AB = AD, \quad BC = DC. \quad (4)$$

Из соотношений (4) следует, что четырехугольник $ABCD$ представляет собой так называемый дельтоид. Поскольку диагонали дельтоида взаимно перпендикулярны

(вершины B и D расположены симметрично относительно диагонали AC), то тем самым утверждение задачи доказано.

В приведенном выше решении имеется пробел: при выводе соотношений (2) мы использовали рис. 40, не задумываясь над тем, всегда ли относительное расположение вершин четырехугольника и точек касания продолжений его сторон с дописанной окружностью остается таким, как на рис. 40. Точнее говоря, осталось невыясненным, всегда ли можно обозначить вершины выпуклого четырехугольника, обладающего дописанной окружностью, в том порядке, в котором они встречаются при обходе периметра, буквами A, B, C, D так, чтобы точки касания дописанной окружности с продолжениями сторон четырехугольника находились на лучах AB, BC, DC, AD (первая буква означает вершину, из которой исходит луч), как это изображено на рис. 40. Докажем, что в действительности все обстоит именно так.

Рассмотрим одну из сторон данного выпуклого четырехугольника и прямую m, на которой лежит эта сторона. Будем различать два случая.

а. Четырехугольник и дописанная окружность расположены по одну и ту же сторону от прямой m. Пусть M — точка касания прямой m с окружностью. Вершины четырехугольника, лежащие на прямой m, обозначим A и B так, чтобы точка M оказалась на луче AB. Остальные вершины обозначим C и D так, чтобы при обходе четырехугольника они встречались в последовательности A, B, C, D. Наконец, точки касания прямых BC, CD, DA с дописанной окружностью обозначим соответственно N, P, Q.

Тогда N будет лежать на луче BC, а точка Q — на луче AD, поскольку точки C и N, а также D и Q находятся по одну и ту же сторону от прямой m. Точка P окажется на луче DC, так как точки D и P расположены по разные стороны от прямой BC (поскольку четырехугольник и дописанная окружность лежат по разные стороны от прямой BC). Итак, мы пришли к такому расположению вершин и точек касания, которое изображено на рис. 40.

б. Четырехугольник и дописанная окружность расположены по разные стороны от прямой m. Пусть N — точка касания прямой m с дописанной окружностью, а

вершины четырехугольника, лежащие на прямой m, обозначим B и C так, чтобы точка N оказалась на луче BC. Остальные вершины обозначим D и A так, чтобы при обходе четырехугольника они встречались в последовательности B, C, D, A. Наконец, точки касания прямых CD, DA, AB с дописанной окружностью обозначим P, Q, M. Как и в п. а, нетрудно проверить, что точки P, Q, M лежат на лучах DC, DA, AB.

Примечание 1. Если четырехугольник $ABCD$ — дельтоид, то его диагонали взаимно перпендикулярны, но не наоборот, поскольку четырехугольник с взаимно перпендикулярными диагоналями является дельтоидом лишь в том случае, если одна из диагоналей служит осью его симметрии. Таким образом, в приведенном выше решении мы доказали более сильное утверждение, чем то, которое содержится в задаче.

Примечание 2. Справедливо и обратное утверждение. Если четырехугольник — дельтоид (выпуклый, но отличный от ромба), то существует не только вписанная окружность, касающаяся его сторон, но и окружность, касающаяся продолжений его сторон. Это следует из того, что одна из диагоналей дельтоида, например AC, лежит на оси его симметрии. Вследствие симметрии окружность с центром на прямой AC, касающаяся сторон AB и BC (или продолжений сторон AB и BC), касается и сторон AD и DC (или продолжений сторон AD и DC).

47. Доказательство необходимо провести лишь для случая, когда прямая MN не параллельна основанию треугольника.

Выбрав обозначения так, как показано на рис. 41, применим к треугольникам MKS и NLS теорему синусов:

$$KS = MS\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = MS\cdot\frac{\sin(\alpha-\omega)}{\sin\alpha},$$

$$SL = SN\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = MS\cdot\frac{\sin(\alpha+\omega)}{\sin\alpha}.$$

Тогда

$$KL = KS + SL = MS\frac{\sin(\alpha-\omega)+\sin(\alpha+\omega)}{\sin\alpha} =$$

$$= MS\frac{2\sin\alpha\cos\omega}{\sin\alpha} = 2MS\cos\omega,$$

или

$$KL = MN\cos\omega.$$

Поскольку угол ω равен углу наклона отрезка MN к основанию треугольника, то последнее равенство означает, что длина ортогональной проекции отрезка MN на

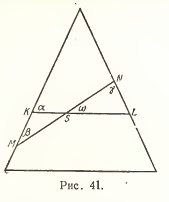


Рис. 41.

основание треугольника равна длине отрезка KL. Тем самым утверждение задачи доказано.

48. Выберем в плоскости, содержащей прямые m и AB, точку C, расположенную по другую сторону от прямой m, чем точки A и B.

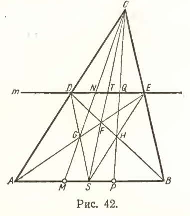


Рис. 42.

Выполним последовательно следующие построения. Проведем отрезки AC и BC, пересекающие прямую m соответственно в точках D и E; отрезки AE и BD, пере-

секающиеся в некоторой точке F; прямую CF, пересекающую отрезки AB и DE соответственно в точках S и T; отрезок SD, пересекающийся с отрезком AE в точке G, и отрезок SE, пересекающийся с отрезком BD в точке H; наконец, прямые CG и CH, пересекающие отрезки AB и DE соответственно в точках M, N и P, Q (рис. 42).

Докажем, что точки M и P делят отрезок AB на 3 равные части.

Прямую m можно рассматривать как образ прямой AB при гомотетии относительно точки C, а также при гомотетии относительно точек F, G, H.

При гомотетии относительно центра C, а также центра F справедливы соотношения

$$\frac{AS}{SB}=\frac{DT}{TE} \quad \text{и} \quad \frac{AS}{SB}=\frac{ET}{TD}.$$

Умножая отдельно их левые и правые части, получаем

$$\left(\frac{AS}{SB}\right)^2=1,$$

откуда

$$AS=SB=\frac{1}{2}AB. \tag{1}$$

При гомотетии относительно центра C и центра G справедливы соотношения

$$\frac{AM}{AB}=\frac{DN}{DE} \quad \text{и} \quad \frac{DN}{DE}=\frac{SM}{SA},$$

откуда

$$\frac{AM}{AB}=\frac{SM}{SA}$$

а в силу соотношения (1)

$$AM=2MS,$$

и поскольку $AM+MS=\frac{1}{2}AB$, то

$$AM=\frac{1}{3}AB. \tag{2}$$

Аналогично доказывается и соотношение $BP=\frac{1}{3}AB$.

Примечание. Имея заданную прямую m, параллельную прямой AB (и отличную от нее) и пользуясь только линейкой, отрезок AB можно разделить на n равных частей (n — любое

натуральное число). Доказательство этого утверждения сводится к доказательству двух следующих утверждений.

1. Если указанное построение можно провести при некотором натуральном n, то оно осуществимо и при любом натуральном $p < n$. Действительно, предположим, что отрезок AB разделен на n равных частей и M — точка деления, для которой $AM = (p/n)AB$. Выберем точку C по другую сторону от прямой m, чем отрезок AB. Проведя отрезки, соединяющие точки деления отрезка AM с точкой C, получим на прямой m отрезок DE, разделенный на p равных частей. Пусть C' — точка пересечения отрезков BE и AC. Проведя прямые через точку C' и точки деления отрезка DE, получим разбиение отрезка AB на p равных частей.

2. При помощи одной только линейки можно найти середину отрезка AB, если воспользоваться построением, описанным в п. 1 (точка S на рис. 42). Следовательно, отрезок можно разделить на 2^k (k — любое натуральное число) равных частей. Ясно, что для данного n можно выбрать k так, чтобы выполнялось неравенство $2^k > n$.

49. Требуется доказать, что если a — натуральное число, больше 1, то число

$$N = (a^3 - 1)\,a^3\,(a^3 + 1)$$

делится на $504 = 7 \cdot 8 \cdot 9$. Поскольку любые два из трех чисел 7, 8 и 9 взаимно простые, то задача сводится к доказательству делимости N на каждое из них в отдельности.

а. Число a можно представить в виде $a = 7k + r$, где k — натуральное число, а r — одно из чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Тогда $a^3 = 7^3k^3 + 3 \cdot 7^2k^2r + 3 \cdot 7kr^2 + r^3$. Это означает, что при делении на 7 число a^3 дает такой же остаток, как и r^3. Но r^3 — одно из чисел 0, 1, 8, 27, 64, 125, 216, поэтому остаток от деления числа a^3 на 7 равен одному из чисел 0, 1, 6. Отсюда следует, что одно из чисел a^3, $a^3 - 1$, $a^3 + 1$ заведомо делится на 7.

б. Для доказательства делимости числа N на 8 достаточно заметить, что когда число a четно, то a^3 делится на 8, а когда число a нечетно, то $a^3 - 1$ и $a^3 + 1$ — два последовательных четных числа, в силу чего одно из них делится на 4, а их произведение — на 8.

в. Число a можно представить в виде $a = 3l + s$, где l — натуральное число или нуль, а s — одно из чисел 0, 1, 2. Тогда $a^3 = 3^3l^3 + 3 \cdot 3^2l^2s + 3 \cdot 3ls^2 + s^3$, откуда видно, что при делении на 9 число a^3 дает такой же остаток, как и число s^3, то есть 0, 1 или 8. Следовательно, одно из чисел a^3, $a^3 - 1$ или $a^3 + 1$ делится на 9.

50. Выберем на плоскости прямоугольную систему координат XOY и рассмотрим n единичных векторов $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, ..., $\overrightarrow{OA_{n-1}}$, $\overrightarrow{OA_n}$, образующих с осью OX углы $2\pi/n$, $4\pi/n$, ..., $(2n-2)\pi/n$, $2\pi n/n$ (рис. 43). Пусть $\vec{V}$ — сумма этих векторов:

$$\vec{V} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_{n-1}} + \overrightarrow{OA_n}.$$

Разложим каждый из векторов $\overrightarrow{OA_i}$ и вектор $\vec{V}$ на две составляющие (проекции), параллельные осям OX и

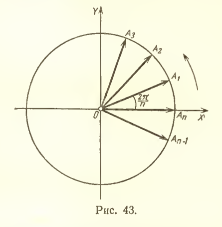


Рис. 43.

OY. Составляющие вектора $\overrightarrow{OA_i}$ равны соответственно $\cos(2i\pi/n)$ и $\sin(2i\pi/n)$. Составляющие вектора $\vec{V}$ обозначим X и Y. Тогда

$$X = \cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \ldots + \cos\frac{(2n-2)\pi}{n} + \cos\frac{2n\pi}{n},$$

$$Y = \sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{4\pi}{\pi} + \ldots + \sin\frac{(2n-2)\pi}{n} + \sin\frac{2n\pi}{n}.$$

Повернем систему n векторов $\overrightarrow{OA_i}$ на угол $2\pi/n$ вокруг точки O (поскольку $n > 1$, то угол поворота меньше 2π). На тот же угол $2\pi/n$ повернется и сумма векторов, или вектор $\vec{V}$. Нетрудно заметить, что после поворота мы получаем систему векторов, не отличающуюся от исходной, поскольку вектор $\overrightarrow{OA_1}$ переходит в вектор

$\overrightarrow{OA}_2$, вектор $\overrightarrow{OA}_2$ — в вектор $\overrightarrow{OA}_3$ и так далее, наконец, вектор $\overrightarrow{OA}_{n-1}$ переходит в вектор $\overrightarrow{OA}_n$ и вектор $\overrightarrow{OA}_n$ — в вектор $\overrightarrow{OA}_1$. Но если система векторов после поворота совпадает с системой векторов до поворота, то и сумма векторов после поворота должна быть тем же вектором $\vec{V}$, что и до поворота. Следовательно, вектор $\vec{V}$ не изменяется при повороте его вокруг точки O на угол $2\pi/n$ меньше 2π. Таким свойством обладает лишь нулевой вектор, то есть вектор, стянутый в точку O. Обе составляющие нулевого вектора равны нулю. Таким образом, $X = 0$, $Y = 0$. Тем самым утверждение задачи доказано.

51. Выражение

$$P_k = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4) \ldots (1 + x^{2k})$$

представляет собой произведение $k + 1$ двучленов. Раскрыв скобки, получим сумму 2^{k+s} слагаемых. Отдельные слагаемые мы найдём, выбрав по одному члену в каждой скобке и составив их произведение. Таким образом, P_k можно рассматривать как сумму 2^{k+1} различных степеней переменной x, наименьшую из которых порождает произведение $1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = x^0$, а любая другая представляет собой произведение вида

$$x^{2^{k_1}} \cdot x^{2^{k_2}} \cdot \ldots \cdot x^{2^{k_r}} = x^{2^{k_1} + 2^{k_2} + \ldots + 2^{k_r}}.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $k_1 < k_2 < \ldots < k_r$.

Рассмотрим показатели степени двух членов многочлена $P_k - 1$. Они имеют вид

$$2^{k_1} + 2^{k_2} + \ldots + 2^{k_r} \quad \text{и} \quad 2^{l_1} + 2^{l_2} + \ldots + 2^{l_s},$$

где

$$k_1 < k_2 < \ldots < k_r \quad \text{и} \quad l_1 < l_2 < \ldots < l_s,$$

причем наборы натуральных чисел $k_1, k_2, \ldots, k_r$ и $l_1, l_2, \ldots, l_s$ не совпадают. Докажем, что показатели степени выбранных нами членов не равны.

Доказательство проведем от противного. Предположим, что

$$2^{k_1} + 2^{k_2} + \ldots + 2^{k_r} = 2^{l_1} + 2^{l_2} + \ldots + 2^{l_s}. \qquad (1)$$

Равенство (1) можно записать в виде

$$2^{k_1}\left(1+2^{k_2-k_1}+\ldots+2^{k_r-k_1}\right)= \\ =2^{l_1}\left(1+2^{l_2-l_1}+\ldots+2^{l_s-l_1}\right). \quad (2)$$

Поскольку числа $k_2-k_1, \ldots, k_r-k_1, l_2-l_1, \ldots, l_s-l_1$ положительны, то суммы, стоящие в скобках в обоих частях равенства (2) — нечетные целые числа. Поэтому из равенства (2) следует, что

$$2^{k_1}=2^{l_1},$$

откуда $k_1=l_1$. Таким образом, в правой и в левой частях равенства (1) можно вычеркнуть первые члены. В результате мы получим укороченное равенство

$$2^{k_2}+\ldots+2^{k_r}=2^{l_2}+\ldots+2^{l_s}. \quad (3)$$

Повторяя — применительно к равенству (3) — приведенные выше рассуждения, мы убедимся в том, что

$$k_2=l_2.$$

Продолжая «укорачивать» исходное равенство (1), мы в конце концов придем к заключению, что если оно выполняется, то $r=s$ и $k_i=l_i$ при любом i от 1 до r, то есть набор показателей $k_1, k_2, \ldots, k_r$ совпадает с набором показателей $l_1, l_2, \ldots, l_s$. Но для двух различных членов многочлена P_k-1 это невозможно. Следовательно, любые два члена многочлена P_k представляют собой различные степени x. Поскольку младший член многочлена P_k равен произведению $1\cdot 1\cdot \ldots \cdot 1=x^0$, его старший член равен $x\cdot x^2\cdot x^4 \ldots x^{2^k}=x^{2^{k+1}-1}$, а всего многочлен P_k содержит 2^{k+1} членов, то многочлен P_k является суммой всех степеней x от нулевой до $(2^{k+1}-1)$-й, то есть

$$P_k=1+x+x^2+\ldots+x^{2^{k+1}-1}.$$

52. Будем придерживаться обозначений, показанных на рис. 44. Требуется доказать, что центр тяжести четырехугольника $ABCD$ совпадает с центром тяжести четырехугольника $MNPQ$. Последний же представляет собой не что иное, как параллелограмм, поскольку прямые

MN и QP (а также прямые $1—4$ и $8—5$) параллельны прямой AC, а прямые MQ и NP параллельны прямой BD.

Определим прежде всего центры тяжести треугольников ABC и ADC, на которые диагональ AC разбивает четырехугольник $ABCD$. Центр тяжести S треугольника ABC лежит на медиане BK этого треугольника, причем

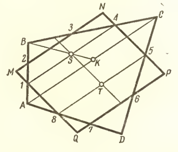


Рис. 44.

$BS = (^2/_3) BK$. Поскольку треугольник $1B4$ гомотетичен треугольнику ABC с коэффициентом $2:3$, то точка S совпадает с серединой отрезка $1—4$. Аналогично можно показать, что центр тяжести T треугольника ADC совпадает с серединой отрезка $8—5$.

Известно, что если фигура составлена из двух частей (не налегающих одна на другую), то центр тяжести такой фигуры лежит на отрезке, соединяющем центры тяжести обеих частей. Следовательно, центр тяжести четырехугольника $ABCD$ лежит на отрезке ST и, значит, на прямой, проходящей через середины сторон MN и QP параллелограмма $MNPQ$. Точно так же центр тяжести четырехугольника $ABCD$ должен лежать и на прямой, проходящей через середины сторон MQ и PN того же параллелограмма. Обе прямые, которым принадлежит центр тяжести четырехугольника $ABCD$, пересекаются в центре параллелограмма $MNPQ$, то есть в его центре тяжести. Следовательно, центры тяжести четырехугольника $ABCD$ и параллелограмма $MNPQ$ совпадают, что и требовалось доказать.

Примечание. Утверждение задачи остается в силе и для невыпуклого четырехугольника. Доказательство проводится так

же, как и в случае выпуклого четырехугольника, с тем лишь различием, что если AC — диагональ, лежащая вне четырехугольника $ABCD$ (рис. 45), то центр тяжести четырехугольника

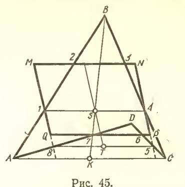


Рис. 45.

$ABCD$ лежит не на отрезке TS, а на его продолжении за точку S.

53. Доказательство утверждения задачи о плоскости, делящей пополам двугранный угол в тетраэдре, можно свести к доказательству аналогичного утверждения о

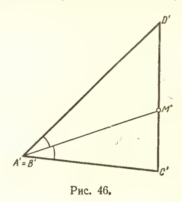


Рис. 46.

биссектрисе угла в треугольнике. Рассмотрим ортогональную проекцию $A'B'C'D'$ тетраэдра $ABCD$ (рис. 46) на плоскость π, перпендикулярную ребру AB.

Проекции A', B' точек A, B совпадают, и проекция тетраэдра имеет вид треугольника $A'C'D'$, причем угол

$C'A'D'$ равен линейному углу двугранного угла с ребром AB. Пусть M' — проекция точки M, в которой плоскость, делящая пополам этот двугранный угол, пересекается с ребром CD. Прямая $A'M'$ — биссектриса угла $C'A'D'$, поскольку углы $C'A'M'$ и $M'A'D'$ равны линейным углам равных двугранных углов. По теореме о биссектрисе внутреннего угла в треугольнике

$$\frac{C'M'}{M'D'} = \frac{A'C'}{A'D'}.$$

Поскольку проектирование не изменяет отношения длин отрезков на прямой, то

$$\frac{C'M'}{M'D'} = \frac{CM}{MD}.$$

Отрезки $A'C'$ и $A'D'$ — проекции треугольников ABC и ABD. Следовательно, отрезки $A'C'$ и $A'D'$ можно рассматривать и как проекции высот треугольников ABC и ABD, опущенных на общую сторону AB. Но эти высоты параллельны плоскости π, на которую спроектирован тетраэдр $ABCD$, и поэтому равны своим проекциям. Поскольку площади треугольников ABC и ABD, имеющих общую сторону AB, относятся как соответственные высоты, то

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABD}} = \frac{A'C'}{A'D'}.$$

Приведенные выше соотношения позволяют привести это равенство к виду

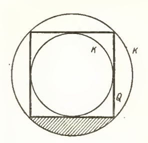
$$\frac{CM}{MD} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABD}},$$

что и требовалось доказать.

54. Как известно, площадь многоугольника, описанного вокруг данной окружности, пропорциональна его периметру, поэтому утверждение задачи эквивалентно утверждению о том, что из всех четырехугольников, описанных вокруг данной окружности, наименьшую площадь имеет квадрат.

Пусть Q — квадрат, описанный вокруг данной окружности K, $ABCD$ — отличный от квадрата четырехуголь-

ник, описанный вокруг той же окружности, и K' — окружность, описанная вокруг квадрата Q. Для большей наглядности на рис. 47 квадрат и четырехугольник описаны вокруг двух разных окружностей, а не вокруг одной и той же окружности.



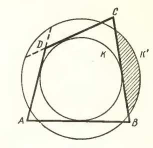


Рис. 47.

Заметим, что по крайней мере одна вершина четырехугольника $ABCD$ должна лежать внутри окружности K', поскольку по крайней мере один из его углов больше прямого.

Стороны квадрата отсекают от круга, ограниченного окружностью K' (мы будем обозначать круг так же, как и граничную окружность), четыре равных сегмента. Пусть s — площадь такого сегмента. Тогда

$$\text{пл. } Q = \text{пл. } K' - 4s. \tag{1}$$

Прямые AB, BC, CD, DA отсекают от круга K' такие же сегменты площадью s. Поскольку по крайней мере одна из точек A, B, C, D лежит внутри окружности K', то по крайней мере два из этих сегментов перекрываются. Следовательно, *площадь* $K' - 4s$ меньше площади той части четырехугольника $ABCD$, которая лежит внутри окружности K', и тем более меньше площади всего четырехугольника $ABCD$:

$$S_{ABCD} > \text{пл. } K' - 4s. \tag{2}$$

Используя соотношение (1), получаем

$$S_{ABCD} > \text{пл. } Q,$$

что и требовалось доказать.

Примечание. Аналогичным образом можно доказать и более общее утверждение:

из всех многоугольников с одним и тем же числом сторон n, описанных вокруг данной окружности, наименьшим периметром обладает правильный многоугольник.

55. Заметим, что утверждение (а) можно сформулировать так: в заданной числовой последовательности каждый пятый член, начиная со второго, делится на 5 и ни один другой член не делится на 5. Поскольку a_2 делится на 5, то это означает, что a_n делится на 5 в том и только в том случае, если $n = 2 + 5k$, где k — любое натуральное число или нуль, откуда $n - 2 = 5k$. Это наводит на мысль ввести новую нумерацию членов последовательности так, чтобы старый номер n был связан с новым номером m соотношением $n = 2 + m$ (m принимает значения — 1, 0, 1, 2, 3, ...). Тогда

$$a_n = 3(m+2)^2 + 3(m+2) + 7 = \\ = 3m^2 + 15m + 25.$$

Поскольку при целом m число $15m + 25$ делится на 5, то из соотношения для a_n следует, что a_n делится на 5 в том и только в том случае, если число $3m^2$ кратно 5. В свою очередь это возможно в том и только в том случае, если m делится на 5, то есть если $n = 2 + 5k$, где k — любое целое неотрицательное число. Тем самым утверждение (а) доказано.

Утверждение (б) докажем от противного. Пусть существует такое целое число t, что при некотором значении индекса n

$$a_n = 3n^2 + 3n + 7 = t^3.$$

Число $3n^2 + 3n + 7 = 3n(n+1) + 7$ нечетно, поскольку $n(n+1)$ как произведение двух последовательных целых чисел четно. Следовательно, t^3, а значит и t, — нечетное число ($t = 2s + 1$, где s — целое число) и

$$3n^2 + 3n + 7 = 8s^3 + 12s^2 + 6s + 1,$$

или

$$3n^2 + 3n + 6 = 8s^3 + 12s^2 + 6s.$$

Из последнего равенства видно, что $8s^3$ (а значит, и s) делится на 3, поскольку все остальные члены в обеих

частях равенства делятся на 3. Подставив $s = 3r$, получим

$$3n^2 + 3n + 6 = 8 \cdot 27r^3 + 12 \cdot 9r^2 + 6 \cdot 3r,$$

или (после деления на 3)

$$n^2 + n + 2 = 72r^3 + 36r + 6r.$$

Мы пришли к противоречию, поскольку правая часть этого равенства делится на 3, а левая не делится. Действительно, при делении на 3 число $n^2 + n + 2$ дает остаток 2, если n — число вида $3k$ или $3k + 2$, и остаток 1, если n имеет вид $3k + 1$. Тем самым утверждение (б) доказано.

56. Докажем сначала следующее утверждение: если a и b — произвольные вещественные числа, а m и n — натуральные числа одинаковой четности, то

$$\frac{a^m + b^m}{2} \cdot \frac{a^n + b^n}{2} \leqslant \frac{a^{m+n} + b^{m+n}}{2}. \qquad (\alpha)$$

Для доказательства заменим неравенство (α) эквивалентным неравенством

$$2\left(a^{m+n} + b^{m+n}\right) - \left(a^m + b^m\right)\left(a^n + b^n\right) \geqslant 0,$$

которое после преобразования левой части можно записать в виде

$$(a^m - b^m)(a^n - b^n) \geqslant 0. \qquad (\beta)$$

Чтобы доказать неравенство (β) для чисел m и n одинаковой четности, необходимо рассмотреть в отдельности два случая.

а. Числа m и n нечетны.

При нечетном показателе степени с увеличением основания степень возрастает. Следовательно, если $a \geqslant b$, то $a^m \geqslant b^m$ и $a^n \geqslant b^n$, а если $a < b$, то $a^m < b^m$ и $a^n < b^n$. Таким образом, при нечетных m и n неравенство (β) выполняется.

б. Числа m и n четны: $m = 2k$, $n = 2l$, где k и l — натуральные числа.

Если $a^2 \geqslant b^2$, то

$$(a^2)^k \geqslant (b^2)^k \quad \text{и} \quad (a^2)^l \geqslant (b^2)^l$$

или

$$a^m \geqslant b^m \quad \text{и} \quad a^n \geqslant b^n.$$

Следовательно, неравенство (β) выполняется.

Если $a^2 < b^2$, то

$$(a^2)^k < (b^2)^k \quad \text{и} \quad (a^2)^l < (b^2)^l,$$

откуда

$$a^m < b^m \quad \text{и} \quad a^n < b^n.$$

Следовательно, неравенство (β) выполняется и в этом случае, что и требовалось доказать.

В силу неравенства (α) для произвольных вещественных a и b справедливы неравенства

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^3+b^3}{2} \leqslant \frac{a^4+b^4}{2}, \tag{2}$$

$$\frac{a^2+b^2}{2} \cdot \frac{a^4+b^4}{2} \leqslant \frac{a^6+b^6}{2}. \tag{3}$$

Умножая отдельно левые и правые части неравенств (2) и (3), получим неравенство (1), которое и требовалось доказать.

57. Подставив в уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

$x = y/a$ и умножив обе части его на a, получим уравнение

$$y^2 + by + ac = 0 \tag{2}$$

с целочисленными коэффициентами.

Если x — рациональное число, то и число $y = ax$ рационально. Следовательно, уравнение (2) так же, как и уравнение (1), имеет рациональный корень. Известно, что если уравнение с целочисленными коэффициентами, в котором коэффициент при старшем члене равен 1, имеет рациональный корень, то этот корень — целое число. Таким образом, уравнение (2) имеет целочисленный корень y_1. Но тогда другой корень y_2 уравнения (2), равный $-b - y_1$, также выражается целым числом. Поскольку

$$y_1 + y_2 = -b, \quad y_1 y_2 = ac,$$

то

$$abc = -y_1 y_2 (y_1 + y_2).$$

По крайней мере одно из чисел y_1, y_2, $y_1 + y_2$ четно, поэтому произведение abc четно. Отсюда следует, что по крайней мере одно из чисел a, b, c четно.

Примечание. В приведенном выше решении мы считали известным утверждение о том, что если уравнение

$$x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0, \qquad (У)$$

где $a_1, \dots, a_n$ — целые числа, имеет рациональный корень $x = p/q$, то число p/q — целое.

Его легко доказать. Не уменьшая общности, можно предположить, что p и q — целые взаимно простые числа. Подставляя в уравнение (У) корень $x = p/q$ и умножая обе стороны на q^n, получаем

$$p^n + a_1p^{n-1}q + \dots + a_{n-1}pq^{n-1} + a_nq^n = 0.$$

В левой части все члены, начиная со второго, делятся на q, и поэтому первый член также должен делиться на q. Отсюда следует, что $q = 1$ или $q = -1$ (в противном случае в разложении q нашелся бы простой множитель $d \neq 1$, который был бы делителем числа p вопреки исходному предположению, согласно которому p и q — взаимно простые числа). Таким образом, p/q — целое число.

58. Предположим, что два из заданных отрезков $a_1, a_2, \dots, a_n$, например, a_1 и a_2, не лежат на одной прямой и поэтому имеют лишь одну общую точку A. Если a_k — любой из остальных отрезков, то по условиям задачи тройка отрезков a_1, a_2, a_k имеет общую точку. Следовательно, отрезок a_k должен содержать точку A, то есть A — общая точка всех отрезков.

Если рассмотренное нами предположение не выполняется, то есть если любые два отрезка лежат на одной прямой, то все заданные отрезки лежат на одной и той же прямой. Поскольку любые три из них имеют общую точку, то и любые два из них также имеют общую точку. Чтобы доказать существование общей точки у всех отрезков, достаточно доказать следующее утверждение:

если отрезки $a_1, a_2, \dots, a_n$ $(n \geqslant 2)$ лежат на одной прямой и любые два из них имеют общую точку, то существует точка, принадлежащая всем отрезкам,

Докажем это утверждение методом математической индукции:

а) при $n = 2$ утверждение заведомо верно;

б) предположим, что оно верно при $n = k \geqslant 2$;

в) тогда оно должно выполняться и при $n = k + 1$.

По предположению (б) отрезки $a_1, a_2, \dots, a_k$ имеют общую точку P. Докажем, что существует точка,

приналлежащая отрезкам $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$. Пусть M и N — концы отрезка a_{k+1} (рис. 48).

Рассмотрим возможные положения точки P относительно точек M и N.

Если точка P лежит между точками M и N или совпадает с одной из них, то P — общая точка отрезков $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$. Если точка M расположена между точками P и N, то M — общая точка отрезков $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_{k+1}$. Действительно, каждый из отрезков $a_1, a_2, \ldots$

Рис. 48.

$\ldots, a_k$ содержит точку P, а также (в силу предположения) некоторую точку Q отрезка MN и, следовательно, должен содержать целый отрезок PQ, а точка M принадлежит отрезку PQ. Наконец, как показывают аналогичные рассуждения, если точка N находится между точками M и P, то N — общая точка отрезков $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_k, a_{k+1}$. Итак, из (а) и (б) следует, что утверждение выполняется при любом $n \geqslant 2$.

Примечание. Приведенное выше утверждение об отрезках, лежащих на одной прямой, является частным случаем важной теоремы о выпуклых фигурах:

если выпуклые фигуры $F_1, F_2, \ldots, F_n$ $(n \geqslant k+1)$ расположены в k-мерном пространстве так, что любые $k+1$ из них имеют (по крайней мере одну) общую точку, то существует (по крайней мере одна) точка, принадлежащая всем фигурам.

Это общее утверждение известно как *теорема Хелли — Радона.*

59. Утверждение, которое требуется доказать, можно свести к известному утверждению о том, что *сумма расстояний от любой точки равностороннего треугольника до его сторон равна высоте этого треугольника.*

Проведем через вершины A, B, C данного треугольника прямые, перпендикулярные соответственно сторонам AB, BC, CA. В обозначениях, показанных на рис. 49, мы получим равносторонний треугольник $A'B'C'$, в котором расстояния OM', ON', OP' от точки O до сторон $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ соответственно равны расстояниям от точек P, M, N до вершин A, B, C, то есть

$$AP = OM', \quad BM = ON', \quad CN = OP',$$

вследствие чего

$$AP + BM + CN = OM' + ON' + OP'.$$

Сумма $OM' + ON' + OP'$ не зависит от положения точки O и равна высоте треугольника $A'B'C'$. Если a — длина стороны треугольника ABC, то длина стороны тре-

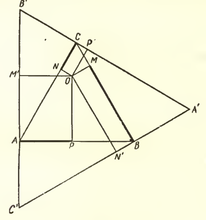


Рис. 49.

угольника $A'B'C'$ равна $b = a\sqrt{3}$, а его высота равна $b\sqrt{3}/2 = 3a/2$. Следовательно, $AP + BM + CN = 3a/2$ независимо от положения точки O в треугольнике ABC, что и требовалось доказать.

Примечание. Утверждение о том, что сумма расстояний h_1, h_2, h_3 от произвольной точки O равностороннего треугольника ABC до его сторон равна высоте h этого треугольника, доказывается без труда. Если точка O выбрана внутри треугольника ABC, то $S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COB}$, откуда $S_{ABC} = a(h_1 + h_2 + h_3)/2$, где a — длина стороны треугольника. Такое же равенство мы получим и в том случае, если точка O лежит на стороне треугольника ABC, но одна или две из длин h_1, h_2, h_3 обращаются в нуль. Таким образом, сумма длин $h_1 + h_2 + h_3$ равна отношению удвоенной площади треугольника ABC к длине его стороны, то есть высоте h треугольника ABC.

60. Пусть a — длина стороны квадрата $ABCD$. Длины боковых ребер пирамиды обозначим k, l, m, n так, чтобы выполнялись неравенства $k \leqslant l \leqslant m \leqslant n$.

Каждый путь, начинающийся и кончающийся в точке S и проходящий через все вершины квадрата $ABCD$, можно условно записать в виде

$$S \ldots W_1 \ldots W_2 \ldots W_3 \ldots W_4 \ldots S, \qquad (1)$$

где W_1, W_2, W_3, W_4 означают вершины A, B, C, D, взятые в том порядке, в каком они встречаются по пути. Отрезок пути от вершины S до вершины W_1 не может быть короче ребра SW_1, а отрезок пути от вершины W_4

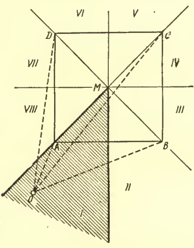


Рис. 50.

до вершины S не может быть короче ребра SW_4. Длина обоих этих отрезков, взятых вместе, не может быть меньше суммы двух наиболее коротких боковых ребер, то есть меньше $k + l$. Отрезок пути от вершины W_1 до вершины W_2 не может быть короче стороны квадрата $ABCD$, то есть короче a. То же относится и к отрезкам пути от W_2 до W_3 и от W_3 до W_4. Таким образом, весь путь (1) не может быть короче $k + l + 3a$.

Следовательно, если найдется путь, длина которого равна $k + l + 3a$, то он будет кратчайшим. Чтобы найти его, определим два наиболее коротких боковых ребра пирамиды.

Проведем 4 оси симметрии квадрата $ABCD$ (рис. 50). Они делят плоскость квадрата на 8 секторов I—$VIII$.

Проекция O вершины S пирамиды лежит внутри одного из секторов (например, внутри сектора I) или на его границе. По свойству прямой, проходящей через середину отрезка перпендикулярно ему, справедливы неравенства

$$OA \leqslant OB \leqslant OD \leqslant OC.$$

Следовательно, OA и OB — два кратчайших отрезка из отрезков OA, OB, OC, CD; SA и SB — два наиболее коротких боковых ребра пирамиды (более короткой проекции соответствует более короткая наклонная), а именно: $SA = k$, $SB = l$. Таким образом, путь $SADCBS$, имеющий длину $SA + AD + DC + CB + BS = k + l + 3a$, — кратчайший из возможных.

Если точка O лежит на луче MA, но не совпадает с центром квадрата M, то существуют 2 кратчайших пути $SADCBS$ и $SABCDS$. Наконец, когда точка O совпадает с точкой M, то существуют 4 кратчайших пути. Ясно, что любой из путей можно проходить в двух направлениях.

61. а. Предположим, что некоторое число x удовлетворяет обоим уравнениям

$$\begin{cases} x^2 + p_1x + q_1 = 0, \\ x^2 + p_2x + q_2 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Необходимое и достаточное условие, о котором говорится в условиях задачи, мы найдем, исключив x из этих уравнений. Сделать это можно, например, следующим способом.

Если $p_1 \neq p_2$, то уравнения (1) можно разрешить относительно x и x^2:

$$x = -\frac{q_2 - q_1}{p_2 - p_1}, \quad x^2 = \frac{p_1q_2 - p_2q_1}{p_2 - p_1}. \qquad (2)$$

Следовательно, должно выполняться соотношение

$$\frac{p_1q_2 - p_2q_1}{p_2 - p_1} = \left(\frac{q_2 - q_1}{p_2 - p_1}\right)^2, \qquad (3)$$

которое после несложных преобразований приводится к виду

$$(p_1 - p_2)(p_1q_2 - p_2q_1) + (q_1 - q_2)^2 = 0. \qquad (4)$$

Если же $p_1 = p_2$, то, вычитая из одного равенства (1) другое, мы получаем равенство свободных членов $q_1 - q_2 = 0$. Следовательно, соотношение (4) выполняется и в этом случае. Итак, соотношение (4) — необходимое условие того, чтобы уравнения (1) имели общий корень. Это же условие является и достаточным. Действительно, если $p_1 \neq p_2$, то из соотношения (4) следует соотношение (3), в силу чего

$$x = -\frac{q_2 - q_1}{p_2 - p_1} \tag{5}$$

— общий корень уравнений (2), а значит и уравнений (1). Если же $p_1 = p_2$, то из соотношения (4) мы получаем равенство $q_1 = q_2$. В этом случае оба уравнения (1) тождественны.

Если коэффициенты p_1, q_1, p_2, q_2 исходных уравнений (1) вещественны и удовлетворяют условию (4), то при $p_1 \neq p_2$ их общий корень, определяемый соотношением (5), веществен. Следовательно, остальные корни уравнений (1) также вещественны. При $p_1 = p_2$ оба уравнения имеют одни и те же корни, которые, однако, не обязательно вещественны.

б. Если p_1, q_1, p_2, q_2 — рациональные числа и уравнения (1) имеют общий корень, но не тождественны, то $p_1 \neq p_2$ и общий корень x_1 уравнений (1) определяется выражением (5) и поэтому рационален. Остальные корни x_2 и x_3 уравнений (1) также рациональны, так как $x_2 = -p_1 - x_1$ и $x_3 = -p_2 - x_1$.

62. Поскольку $2^5 > 5^2$, то при $n = 5$ неравенство $2^n > n^2$ верно. Предположим, что оно верно при некотором целом $k > 4$, то есть что $2^k > k^2$. Тогда

$$2^{k+1} = 2^k \cdot 2 > k^2 \cdot 2 = k^2 + k^2 > k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2.$$

Таким образом, неравенство $2^n > n^2$ выполняется и при $n = k + 1$. Следовательно, по принципу математической индукции оно выполняется при любом целом $n > 4$.

В приведенном выше доказательстве мы опирались на то, что при $k > 4$ справедливо неравенство $k^2 > 2k + 1$. Действительно, неравенство $k^2 > 2k + 1$ эквивалентно неравенству $k(k-2) > 1$, выполняющемуся при $k > 4$ и даже при $k \geqslant 3$.

Примечание. Справедливо более общее утверждение: если a — целое число больше 1, а n — целое число больше a^2, то

$$a^n > n^a. \quad (1)$$

Доказательство этого утверждения при $a = 2$ приведено выше. Предположим поэтому, что $a > 2$, и воспользуемся методом математической индукции. При $n = a^2$ неравенство (1) выполняется. Действительно, a^{a^2} при $a > 2$ больше, чем $(a^2)^a = a^{2a}$, поскольку из неравенства $a > 2$ следует, что $a^2 > 2a$.

Предположим, что при некотором целом $k \geqslant a^2$

$$a^k > k^a.$$

Требуется доказать, что тогда $a^{k+1} > (k+1)^a$.

По предположению индукции $a^{k+1} = a^k \cdot a > k^a \cdot a$. Следовательно, достаточно доказать, что при $a > 2$ и $k \geqslant a^2$ выполняется неравенство $k^a \cdot a > (k+1)^a$, или

$$\left(\frac{k}{k+1}\right)^a \cdot a > 1.$$

Но если $a > 2$ и $k \geqslant a^2$, то

$$\left(\frac{k}{k+1}\right)^a \cdot a = \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^a \cdot a > \left(1 - \frac{a}{k+1}\right) \cdot a = a - \frac{a^2}{k+1} \geqslant a - \frac{a^2}{a^2+1} \geqslant a - 1 > 1,$$

что и требовалось доказать [1].

63. I решение. Подсчитаем, сколько четырехзначных чисел с неповторяющимися цифрами можно составить из цифр 1, 2, ..., 9. Первую цифру c_1 можно выбрать девятью способами. После того как c_1 определена, вторую цифру c_2 можно выбрать восемью способами. Задав первые две цифры c_1 и c_2, мы сможем выбрать третью цифру c_3 семью способами, а после того, как определены первые три цифры c_1, c_2, c_3, последней цифрой c_4 могут оказаться еще 6 цифр. Таким образом, множество всех допустимых чисел содержит $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ элементов.

Для любого числа, принадлежащего этому множеству, в том же множестве существует вполне определенное число, каждая цифра которого дополняет соответствующую цифру исходного числа до 10. Таким образом,

[1] В доказательстве мы использовали утверждение о том, что если n — целое число больше 1 и $d > -1$, то $(1+d)^n > 1 + nd$. Это неравенство («неравенство Бернулли») нетрудно доказать методом математической индукции.

все числа множества можно разбить на пары, объединив в одну пару числа, у которых цифры, стоящие на одном и том же месте, в сумме дают 10, например 3562 и 7548.

Всего имеется $(1/2)\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6$ таких пар. Сумма чисел, образующих одну пару, равна $1000\cdot 10+100\cdot 10+10\cdot 10+10=11\,110$. Следовательно, сумма всех членов, образующих рассматриваемое множество, равна

$$\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 11\,110=16\,798\,320.$$

II решение. Как подсчитано в I решении, всего существует $9\cdot 8\cdot 7\cdot 6$ допустимых чисел. Столько же цифр приходится на каждый десятичный разряд этих чисел. В любом десятичном разряде каждая из девяти цифр встречается одинаковое число раз, а именно $(9\cdot 8\cdot 7\cdot 6):9=8\cdot 7\cdot 6$ раз. Следовательно, сумма цифр, стоящих в любом десятичном разряде, равна $8\cdot 7\cdot 6(1+2+3+4+5+6+7+8+9)=8\cdot 7\cdot 6\cdot 45$, а сумма всех чисел — $8\cdot 7\cdot 6\cdot 45\cdot 1111=16\,798\,320$.

64. Пусть H — основание высоты правильного тетраэдра $ABCD$, опущенной из вершины D, то есть центр его основания ABC, а M, N, P — точки пересечения плоскости, проходящей через прямую HD, с прямыми BC, CA, AB.

Углы α, β, γ — это углы, образуемые отрезками MD, ND, PD с их проекциями MH, NH, PH на плоскость ABC, поэтому

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{HD}{MH},\quad \operatorname{tg}\beta=\frac{HD}{NH},\quad \operatorname{tg}\gamma=\frac{HD}{PH}. \qquad (2)$$

Нетрудно проверить, что если a — длина ребра тетраэдра, то

$$HD=a\sqrt{\frac{2}{3}}. \qquad (3)$$

Соотношения (2) и (3) позволяют преобразовать соотношение (1), которое требуется доказать, к виду

$$\frac{1}{MH^2}+\frac{1}{NH^2}+\frac{1}{PH^2}=\frac{18}{a^2}. \qquad (4)$$

Мы видим, что утверждение задачи свелось к утверждению (4) из планиметрии о равностороннем треугольнике ABC (со стороной a), стороны которого BC,

CA, AB или их продолжения пересекаются в точках M, N, P с прямой l, проходящей через центр H треугольника (рис. 51).

Поскольку точка H находится внутри треугольника, то точки M, N, P лежат на прямой l по разные стороны от точки H. Не уменьшая общности, предположим, что точка M лежит по одну, а точки N и P — по другую

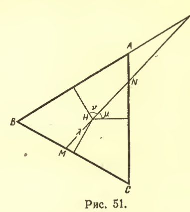


Рис. 51.

сторону от точки H (точки N и P могут, в частности, совпадать с вершиной A). Пусть λ, μ, ν — углы, которые отрезки HM, HN, HP образуют с перпендикулярами, опущенными из точки H на стороны BC, CA, AB. Как известно, эти перпендикуляры имеют длину $a\sqrt{3}/6$ и образуют между собой углы 120°.

Поскольку

$$HM = \frac{a\sqrt{3}}{6\cos\lambda}, \quad HN = \frac{a\sqrt{3}}{6\cos\mu}, \quad HP = \frac{a\sqrt{3}}{6\cos\nu},$$

причем

$$\mu + \nu = 120°, \quad \lambda + \mu = 60°$$

и, следовательно,

$$\mu = 60° - \lambda, \quad \nu = 60° + \lambda,$$

то

$$\frac{1}{HM^2} + \frac{1}{HN^2} + \frac{1}{HP^2} =$$
$$= \frac{12}{a^2}[\cos^2\lambda + \cos^2(60° - \lambda) + \cos^2(60° + \lambda)].$$

При помощи известных соотношений для тригонометрических функций нетрудно вычислить, что

$$\cos^2 \lambda + \cos^2 (60° - \lambda) + \cos^2 (60° + \lambda) = \frac{3}{2}.$$

Подставляя значение этой суммы в предыдущее равенство, получаем

$$\frac{1}{HM^2} + \frac{1}{HN^2} + \frac{1}{HP^2} = \frac{18}{a^2},$$

что и требовалось доказать.

65. Чтобы приводимое ниже доказательство не зависело от расположения точек на окружности, мы не будем в своих рассуждениях ссылаться на чертеж.

Подвергнув фигуру $\Phi_1 = \{A, B, C, D, E, F\}$ преобразованию симметрии относительно общей оси симметрии параллельных хорд AB и DE данной окружности, мы получим фигуру $\Phi_2 = \{B, A, C', E, D, F'\}$. Буквы в скобках означают образы точек A, B, C, D, E, F фигуры Φ_1. Под действием преобразования параллельные хорды DC и AF перейдут в параллельные хорды EC' и BF'. Подвергнув затем фигуру Φ_2 преобразованию симметрии относительно общей симметрии хорд EC' и BF', получим фигуру $\Phi_3 = \{F', A', E, C', D', B\}$. Наконец, подвергнув фигуру Φ_3 преобразованию симметрии относительно оси симметрии хорды BE, получим фигуру $\Phi_4 = \{F'', A'', B, C'', D'', E\}$. Фигура Φ_4 получилась из фигуры Φ_1 при умножении (то есть последовательном выполнении) трех преобразований симметрии относительно трех прямых, лежащих в плоскости фигуры и проходящих через одну точку — центр O данной окружности. Известно, что произведение таких преобразований также является преобразованием симметрии относительно некоторой прямой, проходящей через точку O. Таким образом, фигуры Φ_1 и Φ_4 симметричны относительно некоторой прямой. При этом преобразовании симметрии, переводящем Φ_1 в Φ_4, точка C переходит в точку B, а точка F — в точку E. Прямые BC и EF, содержащие пары симметричных точек, перпендикулярны оси симметрии и, следовательно, параллельны.

Примечание 1. Фигуры Φ_1 и Φ_4 симметричны относительно некоторой прямой. Следовательно, точка A'' совпадает с

точкой C, а точка D'' — с точкой F, поскольку A'' и D'' — образы точек B и E при этом преобразовании симметрии.

Примечание 2. В приведенном выше решении мы сослались на утверждение о том, что произведение преобразований симметрии плоскости относительно трех прямых, лежащих в этой плоскости и имеющих общую точку, есть преобразование симметрии относительно некоторой прямой, лежащей в той же плоскости.

Доказать это утверждение можно следующим образом.

Пусть a, b, c — три прямые, лежащие в данной плоскости и проходящие через точку O, а P — произвольная точка плоскости. Образ точки P при преобразовании симметрии относительно прямой a обозначим P' и запишем

$$\left.\begin{aligned} &S_a(P) = P'. \\ &\text{Аналогично, пусть } S_b(P') = P'' \text{ и } S_c(P'') = P'''. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Выберем на прямых a, b и c точки A, B и C, отличные от точки O. Соответствие (1) между точками и их образами при преобразовании симметрии относительно прямых a, b, c приводит к следующему равенству направленных углов:

$$\angle(OP, OA) = \angle(OA, OP'),\ \angle(OP', OB) = \angle(OB, OP''), \quad (2)$$
$$\angle(OP'', OC) = \angle(OC, OP'''),$$

откуда

$$\begin{aligned} \angle(OC, OP''') &= \angle(OP'', OB) + \angle(OB, OC) = \\ &= \angle(OB, OP') + \angle(OB, OC) = \\ &= \angle(OB, OA) + \angle(OA, OP') + \angle(OB, OC) \end{aligned}$$

и, наконец,

$$\angle(OC, OP''') = \angle(OP, OA) + \angle(OB, OA) + \angle(OB, OC). \quad (3)$$

Пусть D — такая точка плоскости, что

$$\angle(OA, OD) = \angle(OB, OC), \quad (4)$$

в силу чего

$$\angle(OD, OC) = \angle(OA, OB), \quad (5)$$

так как

$$\angle(OA, OD) + \angle(OD, OC) = \angle(OA, OB) + \angle(OB, OC).$$

Точки P и P''' симметричны относительно прямой $d = OD$, поскольку из соотношений (3), (4), и (5) следует, что

$$\begin{aligned} \angle(OP, OD) &= \angle(OP, OA) + \angle(OA, OD) = \\ &= \angle(OP, OA) + \angle(OB, OC), \\ \angle(OD, OP''') &= \angle(OD, OC) + \angle(OC, OP''') = \\ &= \angle(OA, OB) + \angle(OP, OA) + \angle(OB, OA) + \angle(OB, OC) = \\ &= \angle(OP, OA) + \angle(OB, OC). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\angle(OP, OD) = \angle(OD, OP''').$$

Кроме того, известно, что $OP''' = OP$. Взятые вместе, эти соотношения означают, что точка P''' действительно является образом точки P при преобразовании симметрии относительно прямой $d = OD$. Поскольку P — произвольно выбранная точка плоскости, то можно утверждать, что произведение преобразований симметрии относительно прямых a, b, c есть преобразование симметрии относительно прямой d.

66. Предположим, что точка M находится на стороне AB прямоугольника $ABCD$ (рис. 52).

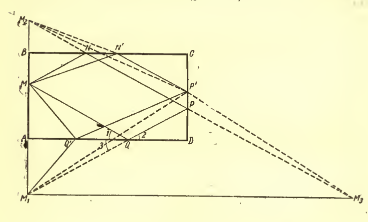


Рис. 52.

Выберем на сторонах BC, CD, DA точки N, P, Q следующим образом. Если точка M не совпадает ни с одной из вершин A и B прямоугольника, то проведем $MN \parallel AC$, $NP \parallel BD$, $PQ \parallel AC$. Тогда $MQ \parallel BD$, и мы получаем путь $MNPQM$, представляющий собой периметр параллелограмма. Если же точка M совпадает с вершиной A, то точка Q также совпадает с вершиной A, а точки P и N совпадают с вершиной C. В этом случае путь $MNPQM$ вырождается в диагональ AC, проходимую дважды. Аналогично если точка M совпадает с точкой B, то путь $MNPQM$ вырождается в диагональ BD, проходимую дважды.

Докажем, что построенный указанным выше способом путь $MNPQM$ — кратчайший из возможных.

Прежде всего убедимся в том, что путь $MNPQM$, длину которого мы обозначим λ, короче любой ломаной $MN'P'Q'M$ с вершинами N', P', Q', лежащими на сторонах BC, CD, DA прямоугольника.

Предположим, что точка M отлична от вершин A и B прямоугольника (если точка M совпадает с A или с B, то доказательство требует лишь незначительных изменений и мы предоставляем его читателю):

Пусть M_1 — точка, симметричная точке M относительно прямой AD, а M_2 — точка, симметричная точке M относительно прямой BC. Точки P, Q и M_1 лежат на одной прямой, поскольку $\angle 1 = \angle 2$ как углы, равные углам, образуемым диагоналями AC и DB со стороной AD, а $\angle 1 = \angle 3$ как симметричные углы, откуда следует, что $\angle 2 = \angle 3$ и отрезок QM_1 служит продолжением отрезка PQ. Точки P, N и M_2 также лежат на одной прямой. Поскольку $MN = M_2N$ и $MQ = M_1Q_1$, то треугольник M_1PM_2 равнобедренный ($M_1P = M_2P$) и длина пути $MNPQM$ равна сумме длин отрезков M_1P и M_2P.

Длина λ' пути $MN'P'Q'M$, равная длине пути $M_2N'P'Q'M_1$, не меньше суммы длин отрезков M_1P' и M_2P', поскольку $M_1Q' + Q'P' \geqslant M_1P'$, а $M_2N' + N'P' \geqslant \geqslant M_2P'$. Наконец, $M_1P' + M_2P' \geqslant M_1P + M_2P$. Действительно, если точка M_3 симметрична точке M_1 относительно прямой CD, то точки M_2, P, M_3 лежат на одной прямой и $M_1P' + M_2P' = M_3P' + M_2P' \geqslant M_3P + M_2P = = M_1P + M_2P$. Из приведенных выше рассуждений следует, что $\lambda' \geqslant \lambda$, причем равенство достигается в том и только в том случае, если точки N', P', Q' совпадают с точками N, P, Q.

Докажем теперь, что любая ломаная $MP'N'Q'M$ (рис. 53), вершины которой P', N', Q' лежат на сторонах CD, BC и DA прямоугольника, длиннее λ.
Пусть S — точка пересечения отрезков MP' и $N'Q'$. Тогда

$$MS + SN' > MN' \quad \text{и} \quad P'S + SQ' > P'Q',$$

поэтому

$$MP' + N'Q' > MN' + P'Q',$$

откуда

$$MP' + P'N' + N'Q' + Q'M > MN' + N'P' + P'Q' + Q'M,$$

то есть ломаная $MP'N'Q'M$ длиннее ломаной $MN'P'Q'M$ и, следовательно, длиннее λ.

Аналогичным образом можно доказать, что длина ломаной $MN'Q'P'M$ больше λ.

После этого уже нетрудно доказать, что длина λ пути $MNPQM$ меньше длины любого другого пути, начинающегося и заканчивающегося в точке M и имеющего об-

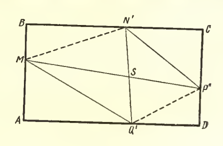


Рис. 53.

щие точки со всеми сторонами прямоугольника. Действительно, такой путь можно записать в виде

$$M \dots K_1 \dots K_2 \dots K_3 \dots M,$$

где K_1, K_2, K_3 — точки, лежащие на трех различных сторонах прямоугольника (не считая стороны AB). Длина пути $M \dots K_1 \dots K_2 \dots K_3 \dots M$ не меньше длины пути $MK_1K_2K_3M$, которая, как показано выше, не меньше длины λ ломаной $MNPQM$, причем равенство достигается в том и только в том случае, если точки K_1, K_2, K_3 совпадают либо с точками N, P, Q, либо с точками Q, P, N.

67. Предположим, что утверждение задачи не верно и выполняется равенство

$$k + (k+1) + \dots + (k+r) = 2^n,$$

где k, r, n — натуральные числа. Тогда, пользуясь формулой суммы членов арифметической прогрессии, получаем

$$(2k+r)(r+1) = 2^{n+1}. \qquad (1)$$

Каждое из натуральных чисел $2k+r$ и $r+1$ больше 1. Их разность $(2k+r)-(r+1)=2k-1$ — число нечетное, следовательно, одно из них также нечетно. Таким образом, левая часть равенства (1) делится на нечетное число больше 1, в то время как правая часть, будучи степенью числа 2, такого делителя не имеет. Отсюда мы заключаем, что равенство (1) не может выполняться.

Примечание. Любое целое число представимо в виде суммы последовательных целых чисел, например:

$$4=(-3)+(-2)+(-1)+0+1+2+3+4.$$

68. Пусть N — натуральное число, не являющееся целой степенью числа 2 и поэтому представимое в виде

$$N=2^n(2m+1),$$

где m и n — целые числа, причем $m \geqslant 1$, $n \geqslant 0$.

Требуется доказать, что существуют целые числа

$$a \geqslant 1, \quad k \geqslant 2, \tag{1}$$

для которых

$$a+(a+1)+\ \ldots\ +(a+k-1)=N,$$

или

$$(2a+k-1)k=2^{n+1}(2m+1). \tag{2}$$

Условие (2) выполняется, если $2a+k-1=2^{n+1}$, $k=2m+1$, то есть если

$$a=2^n-m, \quad k=2m+1. \tag{3}$$

Целые числа a, k, определенные соотношениями (3), удовлетворяют условиям (1) лишь в том случае, если

$$2^n>m. \tag{4}$$

Условие (2) выполняется и в том случае, если $2a+k-1=2m+1$, $k=2^{n+1}$, то есть если

$$a=m+1-2^n, \quad k=2^{n+1}. \tag{5}$$

Числа a и k, определенные соотношениями (5), целые. Условия (1) выполняются лишь в том случае, если

$$2^n \leqslant m. \tag{6}$$

Поскольку одно из неравенств (4) и (6) выполняется всегда, то уравнение (2) всегда допускает решение в целых числах (a, k), удовлетворяющих условиям (1).

Например, при $N = 30$ мы получаем решение $a = 6$, $k = 4$ и $N = 6 + 7 + 8 + 9$, а при $N = 225$ — решение $a = 112$, $k = 2$ и $N = 112 + 113$.

Примечание. Выясним, единственно ли найденное выше разложение натурального числа N в сумму последовательных натуральных чисел.

Как и выше, предположим, что целые числа a и k удовлетворяют условиям (1) и (2). Возможны лишь два следующих случая.

А. Число k четно. Тогда число $2a + k - 1$ нечетно и из равенства (2) следует, что k делится на 2^{n+1}. Это означает, что при некоторых целых $p \geqslant 0$ и $q \geqslant 0$

$$k = 2^{n+1}(2p + 1), \tag{7}$$

$$2a + k - 1 = 2q + 1, \quad \text{или} \quad a = q + 1 - 2^n(2p + 1), \tag{8}$$

и

$$2m + 1 = (2p + 1)(2q + 1). \tag{9}$$

Поскольку $a > 1$, то из соотношения (8) и неравенств (1) получаем неравенство

$$q \geqslant 2^n(2p + 1). \tag{10}$$

Наоборот, если число $2m + 1$ представимо в виде (9), где p и q — целые числа $(p \geqslant 0)$, удовлетворяющие неравенству (10), то числа a и k, определяемые соотношениями (7) и (8), задают разложение числа N в сумму последовательных натуральных чисел. Если при этом $p = 0$, то это разложение совпадает с найденным выше (соотношение (5)).

Б. Число k нечетно, и в силу равенства (2) число $2a + k - 1$ делится на 2^{n+1}. В этом случае

$$k = 2q + 1, \tag{11}$$

$$2a + k - 1 = 2^{n+1}(2p + 1), \quad \text{или} \quad a = 2^n(2p + 1) - q, \tag{12}$$

откуда, как и в случае А,

$$2m + 1 = (2p + 1)(2q + 1), \tag{9}$$

причем p и q — целые числа, удовлетворяющие неравенствам

$$q > 0, \quad q < 2^n(2p + 1), \tag{13}$$

так как $k > 1$, $a > 0$.

Наоборот, если число $2m + 1$ представимо в виде (9), где p и q — целые числа, удовлетворяющие неравенствам (13), то числа a и k, определяемые соотношениями (11) и (12), задают

разложение числа N в сумму последовательных натуральных чисел. Если к тому же $p = 0$, то это разложение совпадает с найденным выше (соотношение (3)).

Итак, мы приходим к следующему заключению. Если число $2m+1$ простое, то существует единственное разложение числа N в сумму последовательных натуральных чисел. Это разложение, найденное выше и определяемое соотношениями (3) или (5) в зависимости от того, какое из неравенств — (4) или (6) — выполняется. Если же число $2m+1$ составное, то существуют и другие разложения, а именно: каждому разложению числа $2m+1$ на два неравных множителя больше 1 соответствуют еще два разложения числа N в сумму последовательных натуральных чисел. Наконец, если число $2m+1$ допускает разложение на два равных множителя, то есть является квадратом целого числа, то это порождает еще одно разложение.

Например, $30 = 6+7+8+9 = 4+5+6+7+8 = 9+10+11$, $225 = 112+113 = 74+75+76 = 43+44+45+46+47 = 35+ + 36+37+38+39+40 = 21+22+23+24+25+26+27+ + 28+29 = 18+19+\ldots+26+27 = 8+9+\ldots+21+22 = = 4+5+\ldots+21$.

69. Пусть $F(n)$ — число способов, которыми можно вложить n писем $L_1, L_2, \ldots, L_n$ в n конвертов $K_1, K_2, \ldots \ldots, K_n$ так, чтобы ни одно письмо L_i не попало в «свой» конверт K_i. Требуется вычислить $F(6)$.

Предположим, что, перепутав письма и конверты, мы вложили письмо L_1 в конверт K_i $(i \neq 1)$. Возможны два случая.

а) Письмо L_i попало в конверт K_1. Тогда остальные 4 письма (ошибочно) вложены в 4 остальных конверта, что можно сделать $F(4)$ способами. Поскольку K_i может быть любым из пяти конвертов K_2, K_3, K_4, K_5, K_6, то разложить 6 писем по шести конвертам так, чтобы письмо L_1 попало в конверт K_i $(i \neq 1)$, письмо L_i — в конверт K_1 и остальные письма также оказались в «чужих» конвертах, нам удастся $5 \cdot F(4)$ способами.

б) Письмо L_i не попало в конверт K_1. Условимся на минуту считать, что письмо L_i должно быть отправлено в конверте K_1. Тогда ни одно из писем L_2, L_3, L_4, L_5, L_6 не попало в «свой» конверт. Разложить в полном беспорядке 5 писем по пяти конвертам можно $F(5)$ способами, а K_i, как и прежде, может быть любым из пяти конвертов. Следовательно, разложить 6 писем по шести конвертам так, чтобы письмо L_1 попало в конверт K_i $(i \neq 1)$, письмо L_i не попало в конверт K_1 и остальные письма также оказались в «чужих» конвертах, нам удастся $5 \cdot F(5)$ способами.

Поскольку случаи (а) и (б) исчерпывают все возможные варианты ошибочного распределения писем по конвертам, то

$$F(6) = 5F(5) + 5F(4).$$

Аналогично

$$F(5) = 4F(4) + 4F(3),$$
$$F(4) = 3F(3) + 3F(2),$$
$$F(3) = 2F(2) + 2F(1).$$

Поскольку ясно, что

$$F(1) = 0, \quad F(2) = 1,$$

то приведенные выше соотношения позволяют последовательно вычислить

$$F(3) = 2, \quad F(4) = 9, \quad F(5) = 44, \quad F(6) = 265.$$

Примечание. В решении задачи 69 число 6 не имеет особого значения. Все рассуждения остаются в силе и в общем случае при произвольном числе n писем и n конвертов. Повторяя их, мы получим соотношение

$$F(n) = (n-1)F(n-1) + (n-1)F(n-2). \tag{1}$$

Это так называемое возвратное, или рекуррентное, соотношение, позволяющее вычислить $F(n)$ по известным значениям $F(n-1)$ и $F(n-2)$.

Соотношение (1) вместе с начальными значениями $F(1) = 0$, $F(2) = 1$ позволяют найти зависимость $F(n)$ от n следующим образом. Запишем соотношение (1) в виде

$$F(n) - nF(n-1) = -[F(n-1) - (n-1)F(n-2)], \tag{2}$$

откуда видно, что разность $F(k) - kF(k-1)$ при любом натуральном $k > 1$ имеет одну и ту же абсолютную величину, но изменяет знак при переходе от k к $k+1$. Поскольку

$$F(2) - 2F(1) = 1,$$

то

$$F(n) - nF(n-1) = (-1)^n, \quad (n > 1). \tag{3}$$

Из соотношения (3) следует, что

$$\frac{F(n)}{n!} - \frac{F(n-1)}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!}. \tag{4}$$

Введя новое обозначение

$$\varphi(n) = \frac{F(n)}{n!},$$

запишем соотношение (4) в виде

$$\varphi(n) - \varphi(n-1) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Аналогично

$$\varphi(n-1) - \varphi(n-2) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\varphi(2) - \varphi(1) = \frac{1}{2}.$$

Складывая отдельно левые и правые части выписанных соотношений и учитывая, что $\varphi(1) = \frac{F(1)}{1} = 0$, получаем

$$\varphi(n) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Таким образом,

$$F(n) = n!\left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!}\right].$$

Решенная нами задача называется задачей Бернулли — Эйлера о перепутанных письмах.

70. Если сечение тетраэдра плоскостью имеет форму параллелограмма, то плоскость сечения не проходит ни через одну из вершин тетраэдра, поскольку в противном случае сечение имело бы форму треугольника, либо выродилось бы в отрезок прямой или точку.

Стороны сечения принадлежат различным граням тетраэдра, а концы каждой стороны совпадают с внутренними точками двух ребер тетраэдра.

Вершины тетраэдра можно обозначить A, B, C, D, а последовательные вершины параллелограмма — M, N, P, Q так, чтобы вершина M лежала на ребре AB, а вершина N — на ребре AC. Тогда вершина P окажется на ребре CD, а вершина Q — на ребре BD (рис. 54).

Поскольку прямые MN и PQ параллельны, то прямая PQ параллельна плоскости ABC, содержащей прямую MN. Следовательно, прямая PQ параллельна прямой пересечения BC плоскостей ABC и DBC и точно так же $MN \parallel BC$. Аналогично $MQ \parallel AD$ и $NP \parallel AD$.

Применяя теорему об отношении сходственных сторон подобных треугольников к треугольникам AMN

и ABC и к треугольникам BMQ и BAD, получаем

$$\frac{MN}{BC}=\frac{AM}{AB} \quad \text{и} \quad \frac{MQ}{AD}=\frac{MB}{AB},$$

откуда

$$\frac{MN}{BC}+\frac{MQ}{AD}=\frac{AM+MB}{AB}=1.$$

Пусть a — длина наименьшего, а b — наибольшего ребра тетраэдра. Тогда $BC \geqslant a$, $AD \geqslant a$, $BC \leqslant b$,

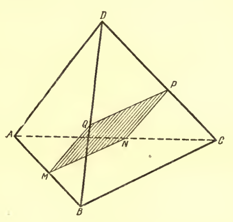


Рис. 54.

$AD \leqslant b$ и из выписанного выше соотношения следует неравенство

$$a \leqslant MN + MQ \leqslant b,$$

которое и требовалось доказать.

71. Пусть AB — наибольшая из сторон треугольника ABC. По предположению $AB < 1$. По ту сторону от прямой AB, по которую лежит треугольник ABC, построим равносторонний треугольник ABC_1 (рис. 55).

Поскольку $AC \leqslant AC_1$ и $BC \leqslant BC_1$, то точка C лежит в круге с центром в точке A и радиусом AC_1 и в круге с центром в точке B и радиусом BC_1. Таким образом, точка C находится в «линзе» — общей части обоих кру-

гов. Это означает, что высота треугольника ABC не превышает высоты треугольника ABC_1, а поскольку тре-

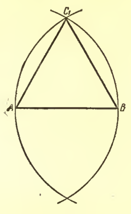


Рис. 55.

угольники ABC и ABC_1 имеют общее основание, то

$$S_{ABC} \leqslant S_{ABC_1}.$$

Но

$$S_{ABC_1} = \frac{(AB)^2 \sqrt{3}}{4} < \frac{\sqrt{3}}{4},$$

поэтому

$$S_{ABC} < \frac{\sqrt{3}}{4},$$

что и требовалось доказать.

Примечание. Если стороны одного треугольника меньше соответствующих сторон другого треугольника, то площадь первого треугольника может тем не менее быть больше площади второго треугольника, поскольку существуют треугольники со сколь угодно большими сторонами, имеющие площадь, которая меньше любого заранее заданного числа. Однако справедлива следующая теорема:

если стороны треугольника ABC меньше соответствующих сторон нетупоугольного треугольника $A_1B_1C_1$, то площадь треугольника ABC меньше площади треугольника $A_1B_1C_1$.

Действительно, суммы углов треугольников равны, поэтому среди углов треугольника ABC заведомо найдется угол, не превышающий соответствующего угла треугольника $A_1B_1C_1$. Пусть,

например, $\angle C \leqslant \angle C_1$. Тогда $\sin C \leqslant \sin C_1$, так как по предположению $\angle C \leqslant 90°$. Но

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC \sin C, \quad S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} A_1C_1 \cdot B_1C_1 \sin C_1.$$

Отсюда в силу неравенств $AC < A_1C_1$, $BC < B_1C_1$, $\sin C \leqslant \sin C_1$ получаем

$$S_{ABC} < S_{A_1B_1C_1}.$$

Итак, мы доказали утверждение, более общее, чем приведено в условиях задачи, которое соответствует случаю, когда $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1A_1 = 1$.

72. Четыре прямые, пересекаясь в шести точках, образуют фигуру, называемую полным четырехсторонником. Каждая из четырех прямых пересекается со всеми другими, и все точки пересечения различны. Любые три

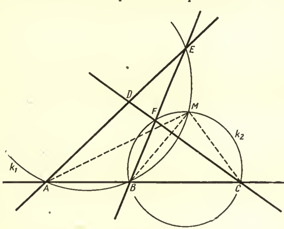


Рис. 56.

из прямых определяют треугольник, а на каждой прямой лежат три из шести точек пересечения. Обозначим эти точки A, B, C, D, E, F (рис. 56) так, чтобы тройки точек (A, B, C), (A, D, E), (C, F, D), (B, F, E) лежали на заданных прямых, причем точка B лежала внутри отрезка AC, точка D — внутри отрезка AE, а F — была общей внутренней точкой отрезков CD и BE.

Полный четырехсторонник содержит треугольники ABE, BCF, ACD и DEF. Пусть k_1, k_2, k_3, k_4 — описанные окружности этих треугольников.

Окружность k_2 пересекается с окружностью k_1 в двух точках, лежащих по разные стороны от прямой FC, поскольку точка F окружности k_2 есть внутренняя точка хорды BE окружности k_1, а точка C окружности k_2 лежит на продолжении хорды AB окружности k_1. Одна из точек пересечения окружностей k_1 и k_2 — точка B, другую обозначим M. Она расположена по ту сторону от прямой AB, что и точки D, E и F. По свойству углов, вписанных в окружность,

$$\angle AMB = \angle AEB, \quad \angle BMC = \angle BFC,$$

поэтому

$$\angle AMC = \angle AMB + \angle BMC = \angle AEB + \angle BFC = \\ = \angle AEB + \angle DFE = \angle ADC.$$

Поскольку точки D и M расположены по одну сторону от прямой AC, то из равенства $\angle AMC = \angle ADC$ следует, что точка M лежит на окружности k_3. Таким образом, окружности k_1, k_2, k_3 имеют общую точку M.

Аналогичным образом можно доказать, что окружности k_1, k_2, k_4 имеют общую точку N. Точки M и N принадлежат окружностям k_1 и k_2. Ни одна из них не может совпадать с общей точкой A этих же окружностей, поскольку точка A лежит на продолжении хорды BC окружности k_2 и на продолжении хорды DE окружности k_4 и поэтому не принадлежит ни окружности k_2, ни окружности k_4. Следовательно, точки M и N совпадают, то есть окружности k_1, k_2, k_3, k_4 имеют общую точку, что и требовалось доказать.

Примечание. Приведеиное выше решеиие неполно: осталось ие доказаиным утверждеиие о том, что точкн пересечения четырех прямых всегда можно обозиачить так, чтобы тройки точек (A, B, C), (A, D, E), (C, F, D), (B, F, E) лежали иа заданных прямых, причем внутреиними точками этих четырех троек были точки B, D и F. В подтверждение того, что такой выбор обозначеиий возможен, мы сослались иа рис. 56, одиако это не было строго доказаио. Докажем теперь иаше утверждеиие в общем виде, ие пользуясь чертежом [1].

[1] Разумеется, для большей наглядностн приводимое ииже доказательство можио сопровождать соответствующими чертежамн, однако все рассуждения не должны зависеть от конкретных деталей того или иного чертежа.

Среди шести заданных точек имеются 4 тройки коллинеарных (то есть лежащих на одной прямой) точек, а в каждой тройке одна из точек лежит между двумя другими. Пусть P_1 — любая из шести заданных точек, не лежащих между двумя другими. Через точку P_1 проходят 2 из четырех заданных прямых. На одной из них лежат еще 2 заданные точки, которые можно обозначить P_2 и P_3 так, чтобы точка P_2 лежала между точками P_1 и P_3. Аналогичным образом на другой прямой лежат 2 другие точки, которые мы обозначим P_4 и P_5 так, чтобы точка P_4 была заключена между точками P_1 и P_5. Шестую точку обозначим P_6. Возможны два случая, которые мы рассмотрим отдельно.

I. P_6 — точка пересечения прямых P_3P_4 и P_2P_5. Тогда точка P_6 лежит между точками P_3 и P_4, поскольку прямая P_2P_5 пересекает сторону P_1P_3 треугольника $P_1P_3P_4$ в точке P_2 и, следовательно, должна пересекать сторону P_3P_4. Аналогично можно доказать, что точка P_6 лежит между точками P_2 и P_5. Если точки P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 обозначить соответственно A, B, C, D, E, F, то новые обозначения будут обладать всеми требуемыми свойствами.

II. P_6 — точка пересечения прямых P_2P_4 и P_3P_5. Здесь в свою очередь могут представиться 2 случая:

а) точка P_2 лежит между точками P_4 и P_6. Тогда точка P_3 лежит между точками P_5 и P_6, поскольку прямая P_1P_3 проходит через точку P_2 стороны P_4P_6 треугольника $P_4P_5P_6$ и, следовательно, должна пересекаться со стороной P_5P_6. Если точки P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 обозначить C, F, D, B, A, E, то новые обозначения будут обладать всеми необходимыми свойствами;

б) точка P_4 лежит между P_2 и P_6. Тогда точка P_5 лежит между точками P_3 и P_6, поскольку прямая P_1P_5 проходит через точку P_4 стороны P_2P_6 треугольника $P_2P_3P_6$ и, следовательно, должна пересекаться в некоторой точке со стороной P_3P_6. Если точки P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 обозначить C, B, A, F, D, E, то новые обозначения будут обладать всеми необходимыми свойствами.

73. Пусть x, y, z означают цифры числа, которое требуется найти (x — число сотен, y — десятков и z — единиц), а c — основание новой системы счисления. Тогда

$$2(100x + 10y + z) = c^2x + cy + z,$$

откуда

$$(200 - c^2)x + (20 - c)y + z = 0. \qquad (1)$$

Итак, задача сводится к решению уравнения (1) в целых числах x, y, z, c, удовлетворяющих условиям $1 \leqslant x \leqslant 9$, $0 \leqslant y \leqslant 9$, $0 \leqslant z \leqslant 9$, $c > x$, $c > y$, $c > z$.

Прежде всего докажем, что основание c новой системы счисления может быть равным только 15. Действительно, если $0 < c \leqslant 14$, а x, y, z удовлетворяют

выписанным выше условиям, то

$$(200-c^2)x+(20-c)y+z\geqslant 4x+6y+z\geqslant 4.$$

Если же $c\geqslant 16$, то

$$(200-c^2)x+(20-c)y+z\leqslant -56x+4y+z\leqslant \leqslant -56+36+9\leqslant -11.$$

Подставляя в уравнение (1) $c=15$, получаем

$$-25x+5y+z=0. \qquad (2)$$

Если целые числа x, y, z удовлетворяют уравнению (2), то z делится на общий множитель 5 первых двух членов. Поскольку $0\leqslant z\leqslant 9$, то это возможно лишь в двух случаях.

Случай 1: $z=0$. Из уравнения (2) получаем

$$-5x+y=0,$$

откуда видно, что x и y могут принимать лишь значения $x=1$, $y=5$. Следовательно, $\overline{xyz}=150$. Это число удовлетворяет условиям задачи, поскольку в системе счисления с основанием 15 запись 150 соответствует десятичному числу $15^2+5\cdot 15=300=2\cdot 150$.

Случай 2: $z=5$. Величины x и y удовлетворяют уравнению

$$-5x+y+1=0,$$

из которых видно, что $x<3$, поскольку при $x\geqslant 3$ левая часть этого уравнения отрицательна: $-5x+y+1\leqslant\leqslant -15+9+1=-5$. Если $x=1$, то $y=4$, а при $x=2$ получаем $y=9$. Трехзначное число $\overline{xyz}$ соответственно равно 145 и 295. Оба числа удовлетворяют условиям задачи, поскольку

$$15^2+4\cdot 15+5=290=2\cdot 145,$$
$$2\cdot 15^2+9\cdot 15+5=590=2\cdot 295.$$

Итак, задача допускает 3 решения: трехзначные числа 145, 150, 295. Основание другой системы счисления для каждого из трех чисел равно 15.

74. Ответ на вопрос задачи зависит от того, будем ли мы включать в число подмножеств пустое множество (то есть множество, не содержащее ни одного элемента)

или нет. В первом случае (пустое множество входит в число подмножеств) ответ на 1 больше, чем во втором. Условимся рассматривать лишь непустые подмножества.

Пусть p — число всех возможных разбиений множества Z, содержащего n элементов, на 2 непустых подмножества. Тогда $2p$ означает число всех подмножеств множества Z, непустых и отличных от самого множества Z.

Число $2p$ мы найдем как сумму числа подмножества, содержащих 1, 2, ..., $(n-1)$ элементов. Поскольку подмножеств, содержащих k элементов, существует столько же, сколько способов выбрать k элементов из n, то есть $\binom{n}{k}$, то

$$2p=\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}. \qquad (1)$$

По формуле бинома Ньютона получаем

$$(1+1)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots$$
$$\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}. \qquad (2)$$

Вычитая из равенства (2) равенство (1) и учитывая, что $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$, получаем

$$2^n-2p=2,$$

откуда

$$p=2^{n-1}-1.$$

75. Возводя обе части исходного неравенства

$$\sqrt[n+1]{n+1}<\sqrt[n]{n} \qquad (1)$$

в $n(n+1)$-ю степень, получаем неравенство

$$(n+1)^n<n^{n+1},$$

эквивалентное (на множестве натуральных чисел) неравенству (1). В свою очередь новое неравенство заменим неравенством $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n<n$, или

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<n. \qquad (2)$$

Неравенство (2) для любого натурального $n > 2$ нетрудно доказать методом математической индукции.

а) При $n = 3$ неравенство (2), очевидно, верно, поскольку

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} < 3.$$

б) Предположим, что при некотором n

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n.$$

в) Тогда

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) < n\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = n + \frac{n}{n+1} < n + 1.$$

Итак, из основания индукции (а) и предположения индукции (б) следует, что неравенство (2), а значит и неравенство (1), выполняется при любом натуральном $n > 2$.

Примечание. Нетрудно указать неравенство, гораздо более сильное, чем неравенство (2): докажем, что для любого натурального n

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

По формуле бинома Ньютона

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \ldots + \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} + \ldots + \binom{n}{n} \frac{1}{n^n}.$$

Кроме того,

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < \frac{1}{k!}.$$

Таким образом,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 1 + \left(2 - \frac{1}{2^n}\right) < 3.$$

Можно доказать, что с увеличением n значение $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ также возрастает. Следовательно, набор чисел $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при $n = 1, 2, 3, \ldots$ представляет собой возрастающую последовательность, каждый член которой меньше 3. Одна из фундаментальных теорем математического анализа утверждает, что такая последовательность имеет предел, то есть существует число, от которого величина $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при достаточно больших n отличается сколь угодно мало. Пределом последовательности $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ служит некоторое иррациональное число, играющее важную роль в математике. Его принято обозначать e. Приближенное значение e составляет 2,71828... .

76. Пусть M и N — середины сторон AB и BC выпуклого четырехугольника $ABCD$. Тогда $MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{2} AC$ (рис. 57).

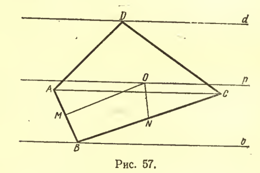


Рис. 57.

Предположим, что O — та самая точка четырехугольника $ABCD$, которую требуется найти.

Проведем через точки B, O, D прямые b, p, d, параллельные прямой AC. Пусть δ — расстояние между прямыми b и d, а ξ — расстояние между прямыми b и p. Тогда

$$S_{OMBN} = S_{MBN} + S_{MON} = \frac{1}{2} MN \cdot \xi = \frac{1}{4} AC \cdot \xi,$$

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} = \frac{1}{2} AC \cdot \delta.$$

Но

$$S_{OMBN} = \frac{1}{4} S_{ABCD},$$

поэтому

$$\frac{1}{4} AC \cdot \xi = \frac{1}{8} AC \cdot \delta,$$

откуда

$$\xi = \frac{1}{2} \delta.$$

Итак, мы выяснили, что прямая p равноудалена от прямых b и d. Следовательно, прямая p проходит через середину отрезка BD.

Это означает, что точка O должна лежать на прямой p параллельной диагонали AC и проходящей через середину диагонали BD. Аналогичным образом можно доказать, что точка O должна лежать и на прямой q,

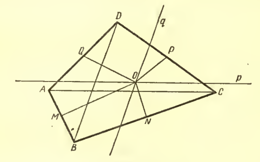


Рис. 58.

параллельной диагонали BD и проходящей через середину диагонали AC. Таким образом, точку O мы найдем, произведя построение, изображенное на рис. 58 (M, N, P, O — середины сторон заданного четырехугольника).

Построение возможно во всех случаях, так как прямые p и q всегда пересекаются. Поскольку четырехугольник $ABCD$ выпуклый, то параллелограмм $MNPQ$ целиком лежит в нем. Середины диагоналей AC и BD находятся внутри параллелограмма $MNPQ$, так как его стороны равны половинам этих диагоналей. Следовательно, точка O пересечения прямых p и q также расположена внутри параллелограмма $MNPQ$, а тем самым и внутри четырехугольника $ABCD$ и отрезки OM, ON, OP, OQ делят четырехугольник $ABCD$ на

4 четырехугольника. Площадь каждого из них составляет $^1/_4$ от площади четырехугольника $ABCD$, поскольку, например, $S_{OMBN} = {}^1/_2 MN \cdot \xi = {}^1/_8 AC \cdot \delta$. Таким образом, построенная точка O удовлетворяет всем условиям задачи. Существует лишь одна такая точка.

77. Найти простое решение задачи нам поможет следующая теорема.

Пусть D, E, F — внутренние точки сторон BC, CA, AB треугольника ABC. Прямые AD, BE и CF пересекаются в том и только том случае, если

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1. \qquad (1)$$

Эту теорему можно доказать следующим образом.

Предположим, что прямые AD, BE, CF пересекаются в точке M. Тогда

$$\frac{BD}{DC} = \frac{S_{AMB}}{S_{AMC}}, \quad \frac{CE}{EA} = \frac{S_{BMC}}{S_{AMB}}, \quad \frac{AF}{FB} = \frac{S_{AMC}}{S_{BMC}}.$$

Умножая отдельно левые и правые части этих равенств, получаем соотношение (1).

Наоборот, пусть D, E, F — точки внутри сторон BC, CA, AB, выбранные так, что выполняется соотношение (1). Тогда прямые AD и BE пересекаются в некоторой точке M, а прямая CM пересекается со стороной AB в некоторой точке F'. По доказанному выше

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF'}{F'B} = 1. \qquad (1')$$

Из соотношений (1) и (1′) следует, что

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AF'}{F'B}, \quad \text{поэтому} \quad \frac{AF}{AB} = \frac{AF'}{AB}$$

и $AF = AF'$, то есть точки F и F' совпадают. Таким образом, прямые AD, BE и CF пересекаются в точке M.

Переходя к исходной задаче, предположим, что биссектриса AD, медиана BE и высота CF треугольника ABC пересекаются в точке M (рис. 59).

Поскольку D — внутренняя точка стороны BC, а E — внутренняя точка стороны CA, то M как общая точка отрезков AD и BE лежит внутри треугольника ABC, в силу

чего F — внутренняя точка стороны AB. Следовательно, углы A и B треугольника острые.

Соотношение (1) выполняется в силу приведенной выше теоремы. Поскольку при обычных обозначениях сторон и углов треугольника $BD/DC = c/b$ (по свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника), $AF = b\cos A$, $FB = a\cos B$ и $CE = EA$, то $c\cos A/a\cos B = 1$,

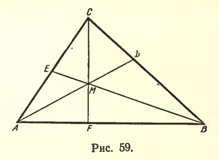


Рис. 59.

откуда $\sin C\cdot\cos A/\sin A\cos B = 1$. Последнее соотношение запишем в виде

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin C}{\cos B}. \qquad (2)$$

Наоборот, если углы треугольника удовлетворяют условию (2), то биссектриса AD, медиана BE и высота CF пересекаются в одной точке. Действительно, в этом случае $\operatorname{tg} A > 0$, $\cos B > 0$, поскольку из соотношения (2), следует, что $\operatorname{tg} A\cdot\cos B = \sin C > 0$, а $\operatorname{tg} A$ и $\cos B$ не могут быть оба отрицательными. Таким образом, углы A и B острые, в силу чего точка F лежит внутри отрезка AB, и, подставляя в тригонометрическое равенство (2) приведенные выше соотношения между линейными элементами треугольника ABC, получаем соотношение (1).

Итак, выполнение равенства (2) необходимо и достаточно для того, чтобы прямые AD, BE, CF пересекались в одной точке.

Примечание. Справедлива также теорема, более общая, чем та, которую мы использовали в приведенном выше решении — так называемая теорема Чевы (и обратная ей).

Пусть A, B, C — вершины треугольника, а точки D, E, F лежат на прямых BC, CA, AB и не совпадают с вершинами

треугольника ABC. Тогда прямые AD, BE, CF пересекаются в одной точке или параллельны в том и только в том случае, если выполняется равенство

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1,$$

где BD, DC, ... — проекции векторов $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DC}$... на ту из осей $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, которая параллельна соответствующему вектору.

Нетрудно доказать эту теорему, если надлежащим образом обобщить приведенное выше доказательство ее более слабого варианта.

73. Прежде чем приступить к решению задачи, докажем следующую лемму.

Если a и b — скрещивающиеся прямые, то существует и притом только одна пара параллельных плоскостей, одна из которых содержит прямую a, а другая — прямую b.

Доказательство. Через произвольно выбранную точку A прямой a проведем прямую b', параллельную прямой b, а через произвольно выбранную точку B прямой b проведем прямую a', параллельную прямой a. Плоскость α, определяемая прямыми a и b', и отличная от нее плоскость β, определяемая прямыми a' и b, параллельны, поскольку две пересекающиеся прямые в одной из плоскостей соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости. Итак, существование пары параллельных плоскостей, содержащих скрещивающиеся прямые a и b, доказано. Докажем теперь ее единственность.

Если плоскости α и α' проходят через прямую a, а плоскости β и β' — через прямую b, причем $\alpha \parallel \beta$ и $\alpha' \parallel \beta'$, то $\alpha = \alpha'$ и $\beta = \beta'$. Действительно, если бы плоскости α и α' не совпадали, то они пересекались бы по прямой a. Но поскольку α и α' параллельны прямой b как лежащей в плоскостях β и β', то прямая a должна была бы быть параллельна прямой b, что невозможно, так как прямые a и b — скрещивающиеся. Следовательно, плоскости α и α' (так же, как и плоскости β и β') совпадают. Итак, лемма полностью доказана.

Заметим теперь, что если a и b — скрещивающиеся прямые, на которых лежат два ребра параллелепи-

педа R, то параллельные плоскости α и β, содержащие прямые a и b, совпадают с плоскостями двух граней параллелепипеда R.

Действительно, через каждую из прямых a и b проходят плоскости двух граней параллелепипеда R, причем все четыре грани, проходящие через прямые a и b, различны. Поскольку у параллелепипеда имеется 6 граней, образующих 3 пары параллельных плоскостей, то среди любых четырех его граней всегда найдутся 2 грани, составляющие одну из таких пар и поэтому расположенные в плоскостях α и β.

Отсюда непосредственно следует, что три пары скрещивающихся ребер параллелепипеда не могут лежать в трех параллельных плоскостях, поскольку каждая из таких плоскостей должна была бы содержать какую-нибудь грань параллелепипеда, а у параллелепипеда не существует трех параллельных граней.

Докажем, что если a, b, c — скрещивающиеся прямые и они не лежат в трех параллельных плоскостях, то существует параллелепипед, три ребра которого лежат на прямых a, b, c.

По доказанной выше лемме существует такая пара плоскостей (α_1, β_1), что $a \subset \alpha_1$, $b \subset \beta_1$, $\alpha_1 \parallel \beta_1$. Точно так же существует такая пара плоскостей (α_2, γ_1), что $a \subset \alpha_2$, $c \subset \gamma_1$, $\alpha_2 \parallel \gamma_1$. Плоскости α_1 и α_2 не совпадают, поскольку в противном случае прямые a, b, c располагались бы на трех параллельных плоскостях, что по доказанному невозможно. Наконец, существует такая пара плоскостей (β_2, γ_2), что $b \subset \beta_2$, $c \subset \gamma_2$, $\beta_2 \parallel \gamma_2$, причем $\beta_2 \neq \beta_1$ и $\gamma_2 \neq \gamma_1$.

Итак, мы получили три пары параллельных плоскостей (α_1, β_1), (α_2, γ_1), (β_2, γ_2). Плоскости каждой пары пересекаются с плоскостями остальных пар. Всего имеется 12 прямых пересечения, в число которых входят и прямые a, b, c. Шесть плоскостей α_1, β_1, α_2, γ_1, β_2, γ_2 высекают в пространстве параллелепипед, а именно: плоскости α_1 и β_1 ограничивают заключенный между ними слой пространства, плоскости α_2 и γ_1 вырезают в этом слое бесконечную призму с четырьмя попарно параллельными гранями и, наконец, плоскости β_2 и γ_2 отсекают от бесконечной призмы параллелепипед, 3 ребра которого являются отрезками прямых a, b, c.

Обладающий этим свойством параллелепипед единствен, поскольку прямыми a, b и c описанное выше построение его граней определено однозначно.

79. Неравенства

$$(a^2 - bc)^2 + (b^2 - ca)^2 + (c^2 - ab)^2 \geqslant 0, \qquad (1)$$

$$(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 \geqslant 0 \qquad (2)$$

справедливы для любых чисел a, b, c и равносильны неравенствам

$$2a^2bc + 2ab^2c + 2abc^2 \leqslant a^4 + b^4 + c^4 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2, \quad (3)$$

$$0 \leqslant a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2. \qquad (4)$$

Сложив отдельно левые и правые части неравенств (3) и (4), получим неравенство

$$2a^2bc + 2ab^2c + 2abc^2 \leqslant 2a^4 + 2b^4 + 2c^4. \qquad (5)$$

По условиям задачи число $2abc$ положительно. Разделив обе части неравенства (5) на $2abc$, преобразуем его к виду

$$a + b + c \leqslant \frac{a^4 + b^4 + c^4}{abc},$$

что и требовалось доказать.

Примечание. Приведенное выше решение задачи весьма просто. Однако найти его не так просто, поскольку нелегко догадаться, что за исходную точку необходимо выбрать неравенства (2) и (3). Ситуация прояснится, если перевести задачу на язык алгебры векторов.

Вектором (n-мерным) называется упорядоченный набор n чисел, например $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. *Суммой векторов* $X = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $Y = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ называется вектор

$$X + Y = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n).$$

Произведением вектора $X = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и числа k называется вектор

$$kX = (ka_1, ka_2, \ldots, ka_n)$$

В частности, $-X = (-a_1, -a_2 \ldots, -a_n)$. *Скалярным произведением* векторов $X = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $Y = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ называется число

$$XY = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n.$$

В частиости,

$$X^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2,$$

поэтому $X^2 \geqslant 0$. Нетрудно доказать, что

$$(X - Y)^2 = X^2 - 2XY + Y^2,$$

откуда $2XY \leqslant X^2 + Y^2$.

В дальиейшем мы будем считать, что $n = 3$.

Для доказательства исходиого неравеиства заметим прежде всего, что в области положительиых чисел оно равиосильио неравеиству

$$a^2bc + b^2ca + c^2ab \leqslant a^4 + b^4 + c^4, \tag{6}$$

которое можио записать в векторной форме

$$XY \leqslant X^2, \tag{7}$$

где $X = (a^2, b^2, c^2)$, $Y = (bc, ca, ab)$.

Нам уже известио, что

$$2XY \leqslant X^2 + Y^2. \tag{8}$$

Поскольку

$$Y^2 = b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = XZ,$$

где $Z = (b^2, c^2, a^2)$, то

$$2Y^2 = X^2 + Z^2.$$

Но

$$Z^2 = b^4 + c^4 + a^4 = X^2,$$

поэтому

$$Y^2 \leqslant X^2. \tag{9}$$

Из неравеиств (8) и (9) получаем

$$XY \leqslant X^2,$$

что и требовалось доказать.

Неравеиства (8) и (9) представляют собой ие что иное, как векторный вариаит неравеиств (3) и (4). Таким образом, иовое доказательство по существу можио рассматривать лишь как иной, более естественный подход к доказательству, приведеиному в решеиии задачи.

80. Пусть J_m означает m-значное число, все цифры которого единицы:

$$J_m = 10^{m-1} + 10^{m-2} + \ldots + 10 + 1 = \frac{1}{9}\left(10^m - 1\right).$$

Приводимое ниже доказательство основано на двух свойствах чисел J_m.

α) Если m делится на d (m и d натуральные числа), то J_m делится на J_d. Действительно, если $m = k \cdot d$ (k — натуральное число), то

$$J_m = J_{kd} = \frac{1}{9}[(10^d)^k - 1] =$$
$$= \frac{1}{9}(10^d - 1) \cdot (10^{kd-d} + 10^{kd-2d} + \ldots + 10^d + 1) = J_d \cdot M,$$

где M — целое число.

β) Если $m > n$, то

$$J_m - J_n = \frac{1}{9}(10^m - 1) - \frac{1}{9}(10^n - 1) =$$
$$= \frac{1}{9}(10^{m-n} - 1) \cdot 10^n = J_{m-n} \cdot 10^n.$$

Пусть J_m и J_n — заданные числа, где $m > n > 1$.

а) Доказательство утверждения о том, что если J_m и J_n — взаимно простые числа, то m и n также взаимно просты, следует непосредственно из свойства α. Действительно, если d — общий натуральный делитель чисел m и n, то J_d — общий делитель чисел J_m и J_n.

б) Докажем обратное утверждение. Предположим, что m и n взаимно простые натуральные числа. Применяя алгоритм Евклида, то есть деля последовательно m на n, n — на полученный остаток r, остаток r — на новый остаток r_1 и так далее, мы будем получать все меньшие и меньшие остатки и в конце концов дойдем до остатка, равного нулю:

$$\begin{aligned} m &= nq + r, & 0 < r < n,\\ n &= rq_1 + r_1, & 0 < r_1 < r,\\ r &= r_1q_2 + r_2, & 0 < r_2 < r_1,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ r_{k-2} &= r_{k-1}q_k + r_k, & 0 < r_k < r_{k-1},\\ r_{k-1} &= r_kq_{k+1}. \end{aligned} \tag{1}$$

Из цепочки равенств (1) следует, что натуральное число r_k — общий делитель чисел $r_{k-1}, r_{k-2}, \ldots, r, n, m$, поэтому $r_k = 1$.

Пользуясь первым из равенств (1) и свойством (β), мы заключаем, что

$$J_m - J_{nq} = J_r \cdot 10^{nq}. \tag{2}$$

Пусть D — общий делитель чисел J_m и J_n. Поскольку по свойству (α) число J_{nq} делится на J_n, то на D в силу соотношения (2) делится число $J_r \cdot 10^{nq}$. Множитель 10^{nq} не имеет других простых делителей, кроме 2 и 5, на которые не делятся числа J_m. Следовательно, число D взаимно просто с 10^{nq} и является делителем числа J_r.

Аналогичным образом, используя второе, третье и последующие из равенств (1), мы докажем, что D — делитель чисел $J_{r_1}, J_{r_2}, \ldots, J_{r_k}$. Но $r_k = 1$, поэтому $J_{r_k} = J_1 = 1$, откуда $D = 1$.

Это и означает, что числа J_m и J_n взаимно просты.

81. Начнем со следующего замечания. Если многочлен с коэффициентом при старшем члене, равным 1, представи́м в виде произведения двух многочленов с целочисленными коэффициентами, то можно считать, что коэффициенты при старших членах этих многочленов также равны 1. Действительно, если a_0x^k и b_0x^l — старшие члены многочленов, произведение которых равно исходному многочлену, то либо $a_0 = b_0 = 1$, либо $a_0 = b_0 = -1$, причем второй случай сводится к первому изменением знака каждого из двух многочленов-сомножителей.

Таким образом, требуется доказать, что многочлен $P(x)$ не представи́м ни в виде $(x + a)Q(x)$, где $Q(x)$ — многочлен четвертой степени с целочисленными коэффициентами и a — целое число, ни в виде $(x^2 + a_1x + a_2) \cdot (x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3)$, где коэффициенты a_1, a_2, b_1, b_2, b_3 — целые числа.

Предположим, что

$$x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 9x - 6 = (x + a)\,Q(x), \qquad \text{(a)}$$

где a — целое число.

Подставляя $x = -a$, получаем

$$-a^5 - 3a^4 - 6a^3 - 3a^2 - 9a - 6 = 0.$$

Это равенство не может выполняться. Действительно, если a делится на 3, то целое число, стоящее в левой части равенства, не делится на 9 (и потому не равно нулю), а при a, не делящемся на 3, не делится на 3. Таким образом, исходный многочлен $P(x)$, не представи́м в виде произведения двух многочленов (a).

Предположим, что

$$x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 9x - 6 =$$
$$= (x^2 + a_1x + a_2)(x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3), \qquad (б)$$

где a_1, a_2, b_1, b_2, b_3 — целые числа. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой частях тождества (б), находим

$$a_2b_3 = -6, \qquad (1)$$
$$a_1b_3 + a_2b_2 = 9, \qquad (2)$$
$$a_1b_2 + a_2b_1 + b_3 = -3, \qquad (3)$$
$$a_1b_1 + a_2 + b_2 = 6, \qquad (4)$$
$$a_1 + b_1 = -3. \qquad (5)$$

Из равенства (1) следует, что одно и только одно из чисел a_2, b_3 делится на 3.

Если a_2 делится, а b_3 не делится на 3, то из равенства (2) следует, что a_1 делится на 3. Но тогда равенство (3) позволяет утверждать, что b_3 делится на 3, и мы приходим к противоречию.

Если a_2 не делится, а b_3 делится на 3, то из равенства (2) следует, что b_2 делится на 3. Тогда равенство (3) позволяет утверждать, что b_1 делится на 3, в силу чего (см. равенство (4)) число a_2 должно делиться на 3, и мы снова приходим к противоречию. Таким образом, разложить многочлен $P(x)$ в произведение (б) также невозможно. Тем самым утверждение задачи полностью доказано.

Примечание. Многочлен положительной степени с рациональными коэффициентами, не представимый в виде произведения двух многочленов меньшей степени с рациональными коэффициентами, называется многочленом, не приводимым над множеством рациональных чисел.

Если многочлен имеет целочисленные коэффициенты, то для доказательства его неприводимости над множеством рациональных чисел достаточно доказать, что он непредставим в виде произведения двух многочленов меньшей степени с целочисленными коэффициентами, поскольку справедлива следующая теорема:

если многочлен $P(x)$ с целочисленными коэффициентами представим в виде произведения двух многочленов степени m и n с рациональными коэффициентами, то он также представим и в виде произведения двух многочленов степени m и n с целочисленными коэффициентами.

В решении задачи было доказано, что многочлен $P(x) = x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 9x - 6$ непредставим в виде произведения двух многочленов меньшей степени с целочисленными

коэффнциеитамн. По прнведениой выше теореме это означает, что миогочлеи $P(x)$ иеприводим иад множеством рациоиальиых чисел. Аиализируя решение, иетрудио заметить его «движущую пружину»: нз всех свойств коэффициентов многочлена $P(x)$ в нем нспользуется лишь то, что все онн, кроме коэффнциента при старшем члеие, делятся иа 3, а свободиый члеи делится иа 9. Поэтому миогочлеи $P(x)$, приведеиный в условиях задачи, можно было бы заменить любым другим многочлеиом, коэффициеиты которого обладают теми же свойствами.

Справедлива следующая общая теорема, известная как *критерий Эйзенштейна неприводимости многочленов*:

если многочлен

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

имеет целочисленные коэффициенты и существует такое простое число p, что коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ делятся на p, a_0 не делится на p и a_n не делится на p^2, то многочлен $P(x)$ неприводим над множеством рациональных чисел.

82. В том случае, когда данные лучи лежат в одной плоскости, утверждение задачи очевидно: прямая d перпендикулярна этой плоскости.

Предположим, что лучи SA, SB, SC образуют трехгранный угол. По условиях задачи прямым может быть не более чем один плоский угол этого трехгранного угла. Пусть, например $\angle ASB \neq 90°$ и $\angle ASC \neq 90°$.

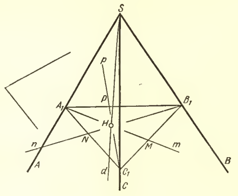


Рис. 60.

Выберем на ребре SA произвольную точку A_1, отличную от S, и проведем через нее плоскость π, перпендикулярную прямой SA_1. Плоскость π пересекается с прямыми SB и SC в некоторых точках B_1 и C_1 (рис. 60).

Пусть α, β, γ — плоскости, проведенные через ребра SA, SB, SC трехграииого угла $SABC$ перпеидикулярио граиям BSC, CSA, ASB, а m, n, p — прямые, по которым плоскости α, β, γ пересекаются с плоскостью π.

Поскольку $\alpha \perp \pi$ и $\alpha \perp BSC$, то $\alpha \perp B_1C_1$, в силу чего прямая m пересекается с прямой B_1C_1 в иекоторой точке M и перпеидикуляриа B_1C_1 ($A_1M \perp B_1C_1$). Так как $\beta \perp ASC$ и $\pi \perp ASC$, то $n \perp ASC$ и поэтому $n \perp A_1C_1$. Но прямые n и A_1C_1 лежат в плоскости π. Следовательно, они пересекаются в иекоторой точке N и $B_1N \perp A_1C_1$. Аиалогичным образом можно убедиться в том, что прямая p пересекается с прямой A_1B_1 в иекоторой точке P и перпеидикуляриа A_1B_1, то есть $C_1P \perp A_1B_1$.

Итак, иа прямых A_1M, B_1N и C_1P лежат высоты треугольиика $A_1B_1C_1$. Следовательио, эти прямые пересекаются в одиой точке H. Тем самым доказаио, что плоскости α, β, γ имеют общую прямую $d = SH$.

83. Достаточио доказать, что любые два из трех отрезков, соедиияющих середииы AB и CD, AC и BD, AD и BC, имеют общую точку, совпадающую с их середииой. Докажем, что середииа H отрезка MN совпадает с середииой K отрезка PQ, где M, N, P, Q — середииы отрезков AB, CD, AC, BD.

Доказательство проводится особеиио просто, если точки A, B, C, D ие лежат в одиой плоскости. В треугольиике ABC отрезок MP параллелен стороне BC, а в треугольиике BDC отрезок QN параллелен стороие BC, поэтому $MP \parallel QN$ и аиалогично $MQ \parallel PN$. Точки M, N, P, Q не лежат на одиой прямой, поскольку плоскости ABC и BDC ие совпадают. Следовательио, четырехугольник $MPNQ$ — параллелограмм и середииа H диагоиали MN совпадает с середииой K диагоиали PQ (рис. 61).

Если точки A, B, C, D лежат в одиой плоскости, то приведеииое выше доказательство утрачивает силу, поскольку точки M, N, P, Q могут ие образовывать параллелограмм, а лежать на одиой прямой. Для этого случая пришлось бы искать другое доказательство, одиако гораздо лучше было бы найти общее доказательство, ие требующее отдельного рассмотрения тех случаев, когда точки A, B, C, D расположеиы иа плоскости или в про-

странстве. Такое доказательство можно получить, если воспользоваться алгеброй векторов.

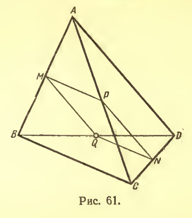


Рис. 61.

Выберем в пространстве произвольную точку O. Поскольку M — середина отрезка AB, то

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

и

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

Векторное равенство $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$ доказывается аналогично. Вычислив полусумму векторов $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON}$, получаем

$$\overrightarrow{OH} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}).$$

Но

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}), \quad \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}),$$

поэтому

$$\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}).$$

Следовательно,

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OK},$$

то есть середины H и K отрезков MN и PQ совпадают, что и требовалось доказать.

84. Пусть все вершины прямоугольника лежат на периметре треугольника. Докажем, что в этом случае площадь S прямоугольника не превышает половины площади T треугольника, причем равенство $S = T/2$ достигается в том и только в том случае, если концы одной из сторон прямоугольника совпадают с серединами двух сторон треугольника.

Если четыре вершины прямоугольника $MNPQ$ лежат на трех сторонах треугольника ABC, то какие-то две вершины прямоугольника расположены на одной и той же стороне треугольника. Можно выбрать такие обозначения точек, чтобы вершины M и N прямоугольника лежали на стороне AB треугольника. Тогда вершина P будет лежать на стороне BC, а вершина Q — на стороне AC.

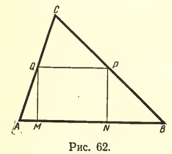


Рис. 62.

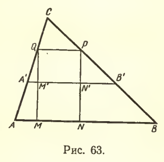


Рис. 63.

Возможен один из трех случаев

1) $AQ = QC$ (рис. 62). Тогда

$$S_{PCQ} = \frac{1}{4}T, \quad S_{MNPQ} = 2S_{PCQ},$$

откуда

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}T.$$

2) $AQ > QC$. Пусть A' и B' — точки, симметричные точке C относительно точек Q и P. Точки A' и B' лежат на отрезках AQ и BP, и отрезок $A'B'$ пересекается со сторонами MQ и NP прямоугольника в точках M' и N' (рис. 63).

По доказанному в случае (1)

$$S_{M'N'PQ}=\frac{1}{2}S_{A'B'C},$$

а поскольку $M'N'=QP=\frac{1}{2}A'B'$, то

$$S_{MNN'M'}<\frac{1}{2}S_{ABB'A'}.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае

$$S_{MNPQ}=S_{MNN'M'}+S_{M'N'PQ}<$$
$$<\frac{1}{2}S_{ABB'A'}+\frac{1}{2}S_{A'B'C}=\frac{1}{2}T.$$

3) $AQ<QC$. Пусть A' и B' означают, как и выше, точки, симметричные точке C относительно точек Q и P,

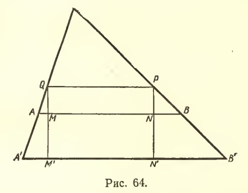


Рис. 64.

а M' и N' — точки, в которых отрезок $A'B'$ пересекается с продолжениями сторон QM и PN прямоугольника. Тогда (рис. 64)

$$S_{M'N'PQ}=\frac{1}{2}S_{A'B'C}\quad\text{[так же, как и в случае (1)]},$$

$$S_{M'N'NM}>\frac{1}{2}S_{A'B'BA},$$

так как $AB<A'B'=2M'N'$, и поэтому

$$S_{MNPQ}=S_{M'N'PQ}-S_{MNN'M'}<\frac{1}{2}S_{A'B'C}-$$
$$-\frac{1}{2}S_{A'B'BA}=\frac{1}{2}T.$$

Итак, наше утверждение полностью доказано.

Предположим теперь, что не все вершины прямоугольника лежат на периметре треугольника. Докажем, что тогда $S < \frac{1}{2}T$. Рассмотрим два случая.

а) Две противоположные стороны прямоугольника параллельны одной из сторон треугольника. Пусть, например, стороны MN и PQ прямоугольника параллельны стороне AB треугольника, причем MN расположена по ту же сторону от прямой PQ, что и прямая AB (рис. 65).

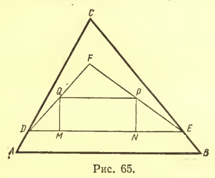


Рис. 65.

Пусть D и E — точки пересечения прямой MN со сторонами AC и BC треугольника. Поскольку луч DQ имеет общую точку с отрезком EC, а луч EP имеет общую точку с отрезком DC, то эти лучи пересекаются в некоторой точке F треугольника DEC. Вершины M, N, P, Q прямоугольника лежат на периметре треугольника DEF, поэтому площадь S прямоугольника не превышает половины площади этого треугольника. Кроме того, площадь треугольника DEF меньше площади треугольника ABC. Действительно, если прямая MN не совпадает с прямой AB, то площадь треугольника DEF меньше площади треугольника ABC по крайней мере на площадь трапеции $ABED$. Если же прямые MN и AB совпадают, то одна из точек P и Q, например P, лежит внутри треугольника ABC и точка F лежит либо внутри треугольника ABC, либо на стороне AC между вершинами A и C. Следовательно, площадь треугольника DEF меньше площади треугольника ABC по крайней мере на площадь треугольника EFC. Таким образом, $S \leq \frac{1}{2}T$.

б) Ни одна из сторон прямоугольника не параллельна сторонам треугольника. Проведем через вершины A, B, C треугольника прямые, параллельные стороне MN прямоугольника (рис. 66).

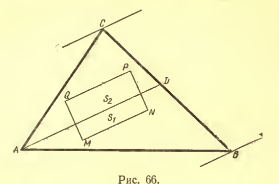


Рис. 66.

В силу принятого нами предположения никакие две из этих прямых не могут совпадать. Следовательно, одна из них, например та, которая проведена через вершину A, проходит между двумя другими и пересекает противоположную сторону в некоторой точке D, разбивая треугольник ABC на треугольники ADB и ADC.

Если прямоугольник $MNPQ$ лежит в одном из них, например в треугольнике ADB, то

$$S \leqslant \frac{1}{2} S_{ADB} < \frac{1}{2} T.$$

Если же прямая AD разделяет прямоугольник $MNPQ$ на два прямоугольника площадью S_1 и S_2, лежащих в треугольниках ADB и ADC, то по крайней мере одна вершина прямоугольника лежит внутри какого-то из треугольников, например вершина N лежит внутри треугольника ABD. Из равенств

$$S_1 < \frac{1}{2} S_{ABD}, \quad S_2 \leqslant \frac{1}{2} S_{ADC},$$

доказаннных выше, получаем

$$S = S_1 + S_2 < \frac{1}{2} S_{ABC} = \frac{1}{2} T.$$

Итак, решение задачи сводится к следующему.

Площадь прямоугольника, вырезанного из треугольника, не превышает половины площади треугольника. Максимум достигается в том и только в том случае, если две вершины прямоугольника совпадают с серединами двух сторон треугольника, а две остальные вершины лежат на его третьей стороне.

Из остроугольного треугольника прямоугольник максимальной площади можно вырезать тремя способами, из прямоугольного треугольника — двумя способами и из тупоугольного треугольника — лишь одним способом.

85. Предположим, что простые числа p_1, p_2, p_3 образуют арифметическую прогрессию с разностью $r > 0$, не делящейся на 6, причем число p_1 наименьшее из них. Тогда

$$p_2 = p_1 + r, \quad p_3 = p_1 + 2r.$$

Нетрудно видеть, что $p_1 \geqslant 3$ (если бы $p_1 = 2$, то p_3 как четное число, которое больше 2, не могло бы быть простым). Следовательно, числа p_1 и p_2 нечетны, а число r, равное разности $p_2 - p_1$, четно и либо $r = 6k + 2$, либо $r = 6k + 4$, где k — целое неотрицательное число.

Докажем, что p_1 делится на 3. Действительно, если бы $p_1 = 3m + 1$ ($m \geqslant 1$ — целое число) и $r = 6k + 2$, то число $p_2 = 3m + 6k + 3$ делилось бы на 3, а поскольку $p_2 > 3$, то оно не могло бы быть простым. Если бы $p_1 = 3m + 1$ и $r_2 = 6k + 4$, то число $p_3 = 3m + 12k + 9$ не могло бы быть простым. Аналогичным образом, если бы $p_1 = 3m + 2$ и $r = 6k + 2$, то число $p_3 = 3m + 12k + 6$ не могло бы быть простым, а если бы $p_1 = 3m + 2$ и $r = 6k + 4$, то число $p_2 = 3m + 6k + 6$ не могло бы быть простым.

Итак, p_1 — простое число, делящееся на 3, то есть $p_1 = 3$, что и требовалось доказать.

86. Проведем доказательство методом от противного. Предположим, что при некотором α выполняется неравенство

$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{\operatorname{tg} 3\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} \leqslant 3. \qquad (1)$$

Тогда при любом целом k величина α удовлетворяет неравенствам

$$\alpha \neq k\pi, \tag{2}$$

$$3\alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}. \tag{3}$$

Неравенство (2) задает значения α, при которых существует $1/\operatorname{tg}\alpha$, а неравенство (3) — значения α, при которых существует $\operatorname{tg} 3\alpha$.

Докажем, что если α удовлетворяет условиям (2) и (3), то

$$\frac{\operatorname{tg} 3\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{3 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}. \tag{4}$$

Из тригонометрии известно, что соотношение

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha\,(3 - \operatorname{tg}^2\alpha)}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha} \tag{5}$$

выполняется при всех α, для которых существуют $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg} 3\alpha$ (в силу чего $1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha \neq 0$), то есть при значениях α, удовлетворяющих неравенству (3) и неравенству

$$\alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \tag{6}$$

где k — любое целое число.

Если, кроме того, $\operatorname{tg}\alpha \neq 0$, то есть при

$$\alpha \neq k\pi \tag{7}$$

(k — целое число), то из равенства (5) следует равенство (4). Таким образом, если α удовлетворяет условиям (2) и (3), то выполняются (6) и (7), и поэтому справедливо соотношение (4).

Из неравенства (1) и соотношения (4) следует, что

$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{3 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha} \leqslant 3.$$

Таким образом, α удовлетворяет двум неравенствам

$$\frac{3 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha} \geqslant \frac{1}{3}, \tag{8}$$

$$\frac{3 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha} \leqslant 3. \tag{9}$$

Из неравенства (8), получаем

$$\frac{3-\operatorname{tg}^2\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}-\frac{1}{3}\geqslant 0, \quad \frac{8}{3(1-3\operatorname{tg}^2\alpha)}\geqslant 0,$$

откуда

$$1-3\operatorname{tg}^2\alpha>0. \qquad (10)$$

Из неравенства (9), преобразуя его, находим

$$\frac{3-\operatorname{tg}^2\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}-3\leqslant 0, \quad \frac{8\operatorname{tg}^2\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}\leqslant 0.$$

Следовательно,

$$\text{либо } \operatorname{tg}^2\alpha=0, \text{ либо } 1-3\operatorname{tg}^2\alpha<0. \qquad (11)$$

Сравнивая условия (10) и (11), нетрудно видеть, что $\operatorname{tg}^2\alpha=0$, поэтому $\operatorname{tg}\alpha=0$ и

$$\alpha=n\pi \quad (n \text{ — целое число}). \qquad (12)$$

Соотношение (12) противоречит неравенству (2). Следовательно, предположение о том, что существует значение α, для которого выполняется неравенство (1), неверно. Тем самым утверждение задачи доказано.

87. Произведение

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)(b_1+b_2+\ldots+b_n)$$

представляет собой сумму n^2 слагаемых двух типов: а) n слагаемых вида a_ib_i, где $i=1, 2, \ldots, n$ (их сумму мы обозначим $\sum\limits_{i=1}^{n} a_ib_i$); б) $n(n-1)$ слагаемых вида a_ib_k, где $i=1, 2, \ldots, n$; $k=1, 2, \ldots, n$, причем $i\neq k$ (их сумму мы обозначим $\sum\limits_{i\neq k} a_ib_k$). Слагаемые второй суммы можно разбить на пары $a_ib_k+a_kb_i$. Для каждой такой пары справедливо неравенство

$$a_ib_k+a_kb_i=(a_ib_i+a_kb_k)-$$
$$-(a_i-a_k)(b_i-b_k)<a_ib_i+a_kb_k,$$

поэтому сумма $\sum\limits_{i\neq k} a_ib_k$ меньше суммы $n(n-1)$ произведений a_ib_i, индекс которых i принимает каждое из значений $1, 2, \ldots, n$ одно и то же число раз (а именно,

$(n-1)$ раз). Таким образом,

$$\sum_{i \neq k} a_i b_k < (n-1)(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)$$

и

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i \neq k} a_i b_k < n(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n),$$

что и требовалось доказать.

Примечание. Справедливо следующее более общее утверждение: *если* $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ *и* $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$, *то*

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) \leqslant$$
$$\leqslant n(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n),$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ *или* $b_1 = b_2 = \ldots = b_n$.

Это неравенство известно как *неравенство Чебышева.*

88. Пусть A, B, C, D, E — заданные точки. Поскольку никакие три из них не лежат на одной прямой, то точки A, B и C служат вершинами треугольника, а каждая из точек D и E лежит либо внутри него, либо снаружи. Могут представиться следующие случаи.

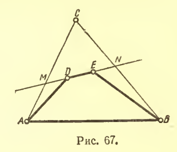


Рис. 67.

а) Точки D и E лежат внутри треугольника ABC. Прямая DE не проходит ни через одну из вершин A, B, C и поэтому пересекает две стороны, например сторону AC в точке M и сторону BC в точке N (рис. 67).

Заданные точки можно обозначить так, чтобы точка D лежала между точками M и E. Четырехугольник $ADEB$ при таком выборе обозначений выпуклый,

в чем нетрудно убедиться, поскольку относительно любой из сторон AD, DE, EB, BA две остальные вершины расположены по одну и ту же сторону.

б) Одна из точек D и E, например D, лежит внутри треугольника ABC, а другая, то есть E, — снаружи. Лучи DA, DB, DC делят плоскость на три выпуклые области (угла) ADB, BDC, CDA. Точка E расположена внутри одной из них, например внутри угла BDC. Четырехугольник $DBEC$ выпуклый как общая часть двух выпуклых угловых областей BDC и BEC (рис. 68).

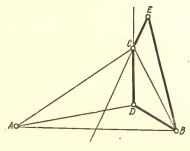


Рис. 68.

в) Точки D и E лежат вне треугольника ABC. Если точка D расположена внутри одного из выпуклых углов BAC, CBA, ACB, например внутри угла BAC

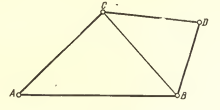


Рис. 69.

(рис. 69), то четырехугольник $ABCD$ выпуклый как общая часть выпуклых угловых областей BAC и BDC.

Если же точка D лежит в одном из углов, образующих с внутренними углами треугольника пары вертикальных углов, например внутри угла, образованного

продолжениями сторон треугольника за вершину A, то точка A находится внутри треугольника BDC (рис. 70).

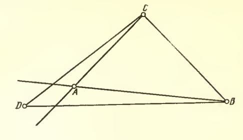


Рис. 70.

Такое расположение точек аналогично рассмотренным ранее случаям (а) или (б).

89. Пусть M, N, P, Q — точки касания сферы с ребрами AB, BC, CD, DA тетраэдра.

Поскольку отрезки касательных, проведенных к сфере из одной точки, равны, то

$$AM = AQ, \quad BM = BN, \quad CN = CP, \quad DP = DQ. \quad (1)$$

Равенства (1) помогут нам доказать, что точки M, N, P, Q лежат в одной плоскости.

Проведем плоскость MNP. Ни через одну из точек A, B, C, D она не проходит. Действительно, если бы плоскость MNP проходила через одну из этих точек, то она, как нетрудно видеть, проходила бы через все четыре точки, что невозможно, поскольку точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Следовательно, точки A и B расположены по разные стороны от плоскости MNP. Аналогичные утверждения справедливы относительно точек B и C, C и D. Это означает, что точки A и D расположены по разные стороны от плоскости MNP и она пересекается с отрезком AD в некоторой точке R. Докажем, что точка R совпадает с точкой Q (рис. 71).

Пусть A', B', C', D' — проекции точек A, B, C, D на плоскость MNP. В подобных треугольниках AMA' и BMB'

$$\frac{AM}{BM} = \frac{AA'}{BB'}.$$

Аналогичным образом можно доказать и равенства других отношений:

$$\frac{BN}{CN}=\frac{BB'}{CC'},\quad \frac{CP}{DP}=\frac{CC'}{DD'},\quad \frac{DR}{AR}=\frac{DD'}{AA'}.$$

Умножая отдельно правые и левые части полученных равенств, находим

$$\frac{AM}{BM}\cdot\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CP}{DP}\cdot\frac{DR}{AR}=\frac{AA'}{BB'}\cdot\frac{BB'}{CC'}\cdot\frac{CC'}{DD'}\cdot\frac{DD'}{AA'}=1.$$

Равенства отрезков (1) позволяют преобразовать последнее равенство к виду

$$\frac{AM}{DP}\cdot\frac{DR}{AR}=1.$$

Поскольку $AM=AQ$, $DP=DQ$, то отсюда следует, что

$$\frac{AQ}{DQ}\cdot\frac{DR}{AR}=1,$$

или

$$AQ\cdot DR=DQ\cdot AR. \qquad (*)$$

Но $DR=AD-AR$, $DQ=AD-AQ$. Подставляя най-

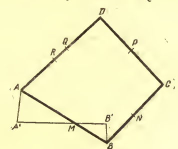


Рис. 71.

денные выражения для DR и DQ в равенство (*), получаем

$$AQ(AD-AR)=(AD-AQ)AR,$$

откуда

$$AQ=AR,$$

то есть точка R совпадает с точкой Q, что и требовалось доказать.

90. Пусть M, N, P, Q — основания перпендикуляров, опущенных из точки O на грани ASB, BSC, CSD, DSA (рис. 72) пирамиды.

Плоскость SOM перпендикулярна плоскости четырехугольника $ABCD$ и плоскости ASB, поскольку содержит перпендикуляры SO и OM к этим плоскостям. Следовательно, плоскость SOM перпендикулярна прямой AB

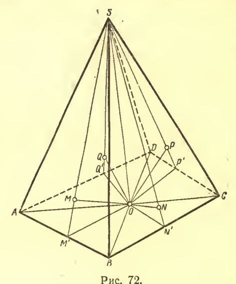


Рис. 72.

пересечения плоскостей $ABCD$ и пересекается с ней в точке M' прямой SM, причем $AB \perp OM'$, то есть точка M' — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую AB. Аналогичным образом прямые SN, SP и SQ пересекаются с прямыми BC, CD и DA в точках N', P', Q', которые служат основаниями перпендикуляров, опущенных из точки O на эти прямые. Известно, что точки M', N', P', Q' лежат на некоторой окружности α. Точки M, N, M', N' также лежат на одной окружности. Действительно, отрезок OB виден из точек M, N, M', N' под прямым углом. Следовательно, все эти точки расположены на поверхности сферы, построенной на отрезке OB как на диаметре. В то же время все они лежат в плоскости SMN и поэтому находятся на линии пересечения

сферы и плоскости, то есть на некоторой окружности β. Окружности α и β лежат в различных плоскостях и имеют две общие точки M' и N'. Значит, существует сфера γ, проходящая через обе окружности α и β. Точки M', N', P', Q', M, N расположены на сфере γ. Вместе с тем точки M', N', P', Q', N, P лежат на некоторой сфере γ', а точки M', N', P', Q', P, Q — на некоторой сфере γ''. Но сферы γ, γ', γ'' совпадают (сферы γ и γ' проходят через вершины тетраэдра $M'N'P'N$, а сферы γ и γ' — через вершины тетраэдра $M'N'P'P$), поэтому точки M', N', P', Q', M, N, P, Q лежат на сфере γ. С другой стороны, точки M, N, P, Q лежат на сфере, построенной на отрезке OS как на диаметре, поскольку из точек M, N, P, Q отрезок OS виден под прямым углом. Эта сфера отлична от сферы γ, поскольку касается плоскости $ABCD$ в точке O и не проходит через точки M', N', P', Q'. Следовательно, точки M, N, P, Q лежат на линии пересечения двух различных сфер, то есть на окружности, что и требовалось доказать.

Примечание 1. То, что точки M', N', P', Q' лежат на одной окружности, можно доказать так.

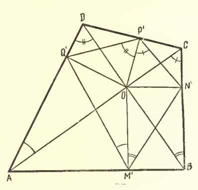


Рис. 73.

Каждый из четырехугольников $AM'OQ'$, $BN'OM'$, $CP'ON'$, $DQ'OP'$ содержит два противолежащих прямых угла, поэтому его вершины расположены на некоторой окружности. По теореме об углах, вписанных в окружность $\angle OM'Q' = \angle OAQ'$, $\angle OM'N' = \angle OBN'$, $\angle OP'Q' = \angle ODQ'$, $\angle OP'N' = \angle OCN'$.

Складывая отдельно правые и левые части этих равенств, получаем $\angle Q'M'N' + \angle Q'P'N' = (\angle OAQ' + \angle ODQ') +$

$+(OBN'+OCN')=90^\circ+90^\circ=180^\circ$. Таким образом, в четырехугольиике $M'N'P'Q'$ сумма двух противолежащих углов равиа 180°. Следовательио, его вершииы лежат иа иекоторой окружиости (рис. 73).

Примечаиие 2. Доказательство того, что точки M, N, P, Q лежат иа одиой окружиости, можио зиачительио сократить, если воспользоваться стереографической проекцией сферы с диаметром OS из точки S иа плоскость $ABCD$. Известио, что при стереографической проекции окружиостям иа плоскости соответствуют окружиости иа сфере. Окружиости, проходящей через точки M', N', P', Q', соответствует окружиость, проходящая через соответствующие точки сферы, то есть через точки M, N, P, Q.

91. Для того, чтобы решить задачу, необходимо исследовать делимость на 5 чисел вида $u=4p^2+1$ и $v=6p^2+1$ (p — целое число).

Пусть r — остаток от деления числа p на 5, то есть пусть $p=5k+r$, где k — целое число, а r — одно из чисел 0, 1, 2, 3, 4. Тогда

$$u=100k^2+40kr+4r^2+1,$$
$$v=150k^2+60kr+6r^2+1.$$

Эти равенства позволяют утверждать следующее:

если $p\equiv 0 \pmod 5$ *, то $u\equiv 1 \pmod 5$, $v\equiv 1 \pmod 5$;
если $p\equiv 1 \pmod 5$, то $u\equiv 0 \pmod 5$, $v\equiv 2 \pmod 5$;
если $p\equiv 2 \pmod 5$, то $u\equiv 2 \pmod 5$, $v\equiv 0 \pmod 5$;
если $p\equiv 3 \pmod 5$, то $u\equiv 2 \pmod 5$, $v\equiv 0 \pmod 5$;
если $p\equiv 4 \pmod 5$, то $u\equiv 0 \pmod 5$, $v\equiv 2 \pmod 5$.

Таким образом, при любом целом p одно и только одно из трех чисел p, u, v делится на 5.

Если p — простое число, то $p\geqslant 2$, $u>5$, $v>5$. Это означает, что числа u и v могут быть простыми в том и только в том случае, если p делится на 5, то есть если $p=5$. При $p=5$ числа u и v, как нетрудно проверить, действительно простые: $u=4\cdot 5^2+1=101$, $v=6\cdot 5^2+1=151$.

Итак, задача имеет единственное решение: $p=5$.

---

* Запись $a\equiv b \pmod n$ (читается: «a сравиимо с b по модулю n») озиачает, что разиость $a-b$ целых чисел a и b делится на натуральиое число n. Если $0\leqslant b\leqslant n-1$, то число b совпадает с остатком от делеиия числа a иа n (или, что то же, с вычетом числа a по модулю n).

92. Докажем утверждение задачи методом математической индукции. Так как p — нечетное число, то числа

$$x_1^0 + x_2^0 = 2 \quad \text{и} \quad x_1 + x_2 = -p$$

целые и взаимно простые. Таким образом, при $n = 0$ утверждение задачи выполнено.

Предположим, что при некотором целом $n \geqslant 0$ числа

$$x_1^n + x_2^n \quad \text{и} \quad x_1^{n+1} + x_2^{n+1}$$

целые и взаимно простые. Докажем, что тогда $x_1^{n+2} + x_2^{n+2}$ — целое число, взаимно простое с числом $x_1^{n+1} + x_2^{n+1}$. Действительно,

$$\left(x_1^{n+1} + x_2^{n+1}\right)\left(x_1 + x_2\right) = x_1^{n+2} + x_2^{n+2} + x_1 x_2 \left(x_1^n + x_2^n\right).$$

Подставляя $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 x_2 = -1$, получаем

$$x_1^{n+2} + x_2^{n+2} = -p\left(x_1^{n+1} + x_2^{n+1}\right) + \left(x_1^n + x_2^n\right).$$

Следовательно, число $x_1^{n+2} + x_2^{n+2}$ как сумма двух целых чисел целое, каждый делитель чисел $x_1^{n+2} + x_2^{n+2}$ и $x_1^{n+1} + x_2^{n+1}$ является делителем числа $x_1^n + x_2^n$, а тем самым общим делителем взаимно простых чисел $x_1^{n+1} + x_2^{n+1}$ и $x_1^n + x_2^n$. Таким образом, числа $x_1^{n+2} + x_2^{n+2}$ и $x_1^{n+1} + x_2^{n+1}$ взаимно простые. Отсюда по индукции мы заключаем, что утверждение задачи выполняется при любом натуральном n.

93. Предположим, что целые числа a и b удовлетворяют соотношению

$$2a^2 + a = 3b^2 + b. \tag{1}$$

Если $a = 0$, то $3b^2 + b = b(3b + 1) = 0$. Отсюда следует, что $b = 0$ (поскольку при целом b множитель $3b + 1 \neq 0$). В этом случае утверждение задачи верно, так как $a - b = 0$, $2a + 2b + 1 = 1$.

Остается рассмотреть случай $a \neq 0$. При $a \neq 0$ из соотношения (1) следует, что $b \neq 0$ и $a \neq b$.

Пусть d — наибольший общий делитель чисел a и b, и пусть

$$a = a_1 d, \quad b = b_1 d. \tag{2}$$

Целые числа a_1 и b_1 взаимно просты, причем $a_1 \neq b_1$. Следовательно, $b_1 = a_1 + r$, где r — отличное от нуля целое число, взаимно простое с a_1.

Из соотношений (1) и (2) получаем

$$2\,da_1^2 + a_1 = 3\,db_1^2 + b_1.$$

Подставляя в новое соотношение $b_1 = a_1 + r$, преобразуем его к виду

$$2\,da_1^2 + a_1 = 3d(a_1 + r)^2 + a_1 + r,$$

откуда

$$da_1^2 + 6\,da_1r + 3\,dr^2 + r = 0. \qquad (3)$$

Три первых члена в левой части равенства (3) делятся на d, поэтому r также делится на d. Три последних члена делятся на r, поэтому da_1^2 делится на r, а поскольку r и a_1 взаимно просты, то d делится на r. Таким образом, либо $r = d$, либо $r = -d$. Если $r = d$, то из соотношения (3) следует, что

$$a_1^2 + 6a_1r + 3r^2 + 1 = 0.$$

Это равенство не может выполняться, так как ни при каком a_1 число $a_1^2 + 1$ не делится на 3. Итак,

$$r = -d.$$

Поскольку $b_1 = a_1 - d$, то $b = a - d^2$ и

$$a - b = d^2. \qquad (4)$$

Из соотношения (1) следует, что

$$2a^2 - 2b^2 + a - b = b^2,$$

или

$$(a - b)(2a + 2b + 1) = b^2. \qquad (5)$$

Отсюда, учитывая соотношения (2) и (4), получаем

$$2a + 2b + 1 = b_1^2. \qquad (6)$$

Утверждение задачи содержится в соотношениях (4) и (6).

Примечание. Можно доказать, что при выполнении равенства (1) $3a + 3b + 1$ также представляет собой квадрат некоторого целого числа. Действительно, $(3a + 3b + 1)(a - b) = 3a^2 + a - 3b^2 - b^2 = 3a^2 + a - 2a^2 - a = a^2$. Следовательно,

если $a \neq b$, то целое число $3a + 3b + 1$ равно частному от деления a^2 и $a - b$, то есть равно a_1^2. Если же $a = b = 0$, то $3a + 3b + 1 = 1$.

94. Назовем обыкновенной точкой замкнутой ломаной любую точку, принадлежащую лишь одному звену ломаной, и любую вершину, принадлежащую лишь двум звеньям ломаной, а любую точку, которая, не будучи вершиной ломаной, принадлежит лишь двум ее звеньям, назовем двойной точкой. Если никакие три вершины замкнутой пятизвенной ломаной не лежат на одной прямой, то любая ее точка либо обыкновенная, либо двойная. Докажем, что такая ломаная может иметь 0, 1, 2, 3 или 5 двойных точек, но не может иметь 4 двойные точки.

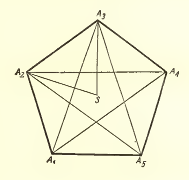


Рис. 74.

Пусть A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 — последовательные вершины правильного пятиугольника. Ломаные $A_1A_2A_3A_4A_5A_1$, $A_1A_2A_3A_5A_4A_1$, $A_1A_3A_5A_4A_2A_1$ и $A_1A_3A_5A_2A_4A_1$ имеют соответственно по 0, 1, 2, 5 двойных точек (рис. 74).

Ломаная $A_1A_3SA_2A_4A_1$, где S — центр того же правильного пятиугольника, имеет 3 двойные точки.

Поскольку 5 прямых могут пересекаться не более чем в $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ точках, то пятизвенная ломаная (с пятью вершинами), не может иметь более пяти двойных точек.

Осталось еще доказать, что число двойных точек ломаной рассматриваемого типа не может быть равно 4.

Предположим, что ломаная $A_1A_2A_3A_4A_5A_1$ имеет более трех двойных точек. Докажем, что тогда она имеет 5 двойных точек. Поскольку ломаная имеет 5 звеньев, то какие-то две из ее двойных точек принадлежат одному и тому же звену, например звену A_1A_2. Обозначим их M и N так, чтобы точка M оказалась между точками A_1 и N. Точки M и N — это точки пересечения звена A_1A_2 со звеньями A_3A_4 и A_4A_5, имеющими общую вершину A_4. Вся ломаная лежит в плоскости $A_1A_2A_4$, причем остальные двойные точки расположены по другую сторону от прямой A_1A_2, чем вершина A_4, а именно принадлежат звеньям A_1A_5 и A_2A_3.

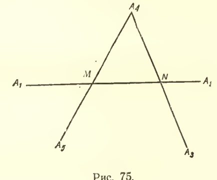


Рис. 75.

Нетрудно убедиться в том, что точка A_3 лежит на прямой A_4M, а точка A_5 — на прямой A_1N. Действительно, если бы было иначе, то есть если бы точка A_3 лежала на прямой A_4N, а точка A_5 — на прямой A_4M (рис. 75), то точки A_1 и A_3 были бы расположены по разные стороны от прямой A_4A_5. Следовательно, звено A_1A_5 не пересекалось бы со звеньями A_2A_3 и A_3A_4. Аналогично звено A_2A_3 не пересекалось бы со звеньями A_4A_5 и A_5A_1. Но тогда вопреки предположению ломаная имела бы только две двойные точки — M и N.

По доказанному выше точки A_1 и A_5 расположены по разные стороны от прямой A_3A_4, а точки A_2 и A_3 — по разные стороны от прямой A_4A_5. Звено A_1A_5 пересекает прямую A_3A_4 в некоторой точке P, а звено A_2A_3 — прямую A_4A_5 в некоторой точке Q. Докажем, что P и Q — двойные точки ломаной, а именно, что точка P

расположена между точками A_3 и M, а точка Q — между точками A_5 и N.

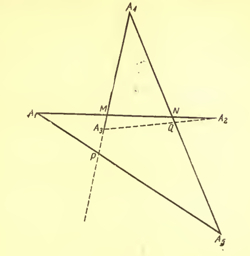


Рис. 76.

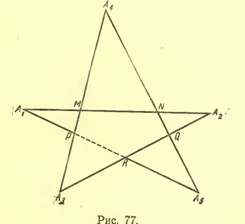


Рис. 77.

Если бы точка P лежала на продолжении отрезка A_4A_3 за точку A_3 (рис. 76), то точки A_2, A_3, A_4 были бы расположены по одну и ту же сторону от прямой A_1A_5

и, следовательно, звено A_1A_5 ломаной не пересекало бы ни одного из звеньев A_2A_3 и A_3A_4.

Но тогда на звене A_1A_5 не было бы ни одной двойной точки, а звену A_2A_3 принадлежала бы только одна двойная точка (точка пересечения звена A_2A_3 со звеном A_4A_5). Таким образом, ломаная имела бы лишь 3 двойные точки, что противоречит исходному предположению. Доказательство того, что точка Q лежит между точками A_5 и N (рис. 77), проводится аналогично.

Отрезки A_1A_5 и A_2A_3 пересекаются в некоторой точке R. Действительно, конец отрезка A_1A_5 лежит вне треугольника A_3A_4Q, а сам отрезок A_1A_5 пересекает сторону A_3A_4 этого треугольника, но не пересекает сторону A_4Q. Следовательно, отрезок A_1A_5 должен пересекать сторону A_3Q треугольника A_3A_4Q. Таким образом, ломаная имеет 5 двойных точек: M, N, P, Q, R.

Примечание. Доказанное выше утверждение является частным случаем общей теоремы о числе замечательных точек замкнутой ломаной. Сформулируем ее для таких ломаных, каждая точка которых принадлежит не более чем двум звеньям. Точку, принадлежащую лишь одному звену, или вершину ломаной, назовем обычной точкой, а точку, принадлежащую двум несмежным звеньям, — двойной точкой ломаной. Для ломаных рассматриваемого нами типа теорема утверждает следующее.

Число двойных точек замкнутой ломаной с $n \geqslant 4$ звеньями может быть равно:

а) *любому из чисел от* 0 *до* $\dfrac{n(n-3)}{2}$ *включительно, кроме числа* $\dfrac{n(n-3)}{2} - 1$, *если n нечетно*;

б) *любому из чисел от* 0 *до* $\dfrac{n(n-4)}{2} + 1$ *включительно, если n четно.*

Никакого другого числа двойных точек у ломаной быть не может. Доказательство этого утверждения можно найти в книге S. Straszewiçz, Zadania z Olimpiad Mathematicznych, t. IV, Warszawa, PZWS, 1972.

95. а. Прежде всего заметим, что если имеется квадрат, разделенный на m квадратов, то один из m квадратов можно разделить на четыре еще меньших квадрата, соединив середины его противоположных сторон. При этом весь исходный квадрат окажется разделенным на $m+3$ квадрата.

Пусть n — натуральное число больше 1. Разделим каждую сторону квадрата Q на n равных частей и соединим

отрезками прямых, параллельных сторонам квадрата, точки деления на каждой из пар противоположных сторон. Квадрат Q окажется разделенным на n^2 меньших квадратов Q_i, причем к каждой стороне квадрата Q будет прилегать n квадратов Q_i.

Рассмотрим две смежные стороны квадрата Q. К ним прилегают $2n-1$ квадратов Q_i (один из квадратов Q_i прилегает к обеим сторонам квадрата Q). Остальные квадраты Q_i заполняют квадрат R со стороной, равной $[(n-1)/n]$-й стороны квадрата Q. Стерев все линии, проходящие по квадрату R, получим разбиение квадрата Q на $2n-1$ квадратов Q_i и квадрат R, то есть на $(2n-1)+1=2n$ квадратов.

Итак, квадрат можно разделить на любое четное число квадратов больше двух.

Но тогда, пользуясь замечанием, приведенным в начале решения, квадрат можно разделить и на $2n+3 = 2(n+1)+1$ $(n>1)$ квадратов, то есть на любое нечетное число квадратов больше пяти.

Итак, мы доказали, что квадрат можно разделить на любое число квадратов больше пяти.

б. Если квадрат разделен на квадраты, то в такой фигуре встречаются только прямые или развернутые углы и стороны меньших квадратов параллельны соответствующим сторонам большего квадрата.

Предположим, что квадрат Q со стороной, равной 1, и вершинами A, B, C, D разделен на 5 квадратов Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5. Каждая вершина квадрата Q служит вершиной одного из квадратов Q_i $(i=1, 2, \ldots, 5)$, причем две различные вершины квадрата Q не могут принадлежать одному и тому же квадрату Q_i, поскольку расстояние между ними $\geqslant 1$. Пусть A, B, C, D служат вершинами квадратов Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 со сторонами a, b, c, d.

Если бы все вершины квадрата Q_5 лежали внутри квадрата Q, то стороны квадратов Q_i целиком покрывали бы стороны квадрата Q, то есть выполнялось бы равенство

$$a+b=b+c=c+d=d+a=1,$$

из которого следовало бы, что $c=a$, $d=b$. Но тогда площадь S_Q квадрата Q можно было бы записать и в виде

$$S_Q=2a^2+2b^2+S_{Q_5},$$

и в виде

$$S_Q = (a + b)^2,$$

из чего следовало бы, что

$$S_{Q_5} = (a + b)^2 - 2a^2 - 2b^2 = -(a - b)^2 \leqslant 0.$$

Площадь квадрата Q_5, очевидно, не может удовлетворять такому неравенству.

Если бы какая-нибудь вершина квадрата Q_5 находилась на одной из сторон квадрата Q, например на стороне AB, то на AB лежала бы какая-нибудь из сторон квадрата Q_5, например MN. Две остальные вершины квадрата Q_5 лежали бы на перпендикулярах, восставленных к AB в точках M и N, на расстоянии меньше 1 от AB, то есть находились бы внутри квадрата Q. Это означало бы, что

$$b + c = 1, \quad c + d = 1, \quad d + a = 1 \quad \text{и} \quad a + b < 1.$$

Эти условия противоречивы, поскольку из трех первых условий следует равенство $(b + c) - (c + d) + (d + a) = 1 - 1 + 1$, то есть $a + b = 1$, противоречащее последнему условию.

Итак, предположение о том, что квадрат Q разделен на 5 квадратов, приводит к противоречию: разбиение квадрата на 5 квадратов невозможно.

96. Последующие рассуждения значительно упрощаются, если ввести некоторые обозначения. Пусть Z — конечное множество точек окружности [1]. Если замкнутая ломаная, вершины которой принадлежат множеству Z, обладает тем свойством, что среди звеньев ломаной каждый отрезок, соединяющий две точки множества Z, встречается один и только один раз, то такую ломаную мы обозначим $L(Z)$.

Предположим, что для некоторого множества Z, содержащего $n \geqslant 3$ точек, существует ломаная $L(Z)$. Тогда в каждой точке множества Z сходятся $n - 1$ звеньев ломаной. Вычерчивая ломаную единым росчерком пера, мы будем входить в каждую вершину столько

[1] Это условие можно заменить более слабым, потребовав, чтобы никакие 3 точки множества Z не лежали на одной прямой. Все приводимые ниже рассуждения при этом остаются в силе.

же раз, сколько выходить из нее, поэтому число $n-1$ четное, а число n нечетное. Таким образом, ломаная $L(Z)$ не может существовать, если n — четное число. Докажем, что при нечетном n ломаная $L(Z)$ существует. (Тем самым мы ответим на вопрос задачи.)

Воспользуемся методом математической индукции. Пусть $n = 2m+1$ (m — натуральное число). При $m = 1$, то есть для множества, содержащего три точки A_1, A_2, A_3, утверждение верно: свойствами, о которых говорится в условиях задачи, обладает ломаная $A_1A_2A_3A_1$.

Предположим, что наше утверждение верно при $m = k-1$, то есть для множества Z, содержащего $2k-1$ точек (k — натуральное число $\geqslant 2$). Докажем, что тогда оно выполняется и при $m = k$, то есть для множества Z, содержащего $n = 2k+1$ точек.

Рассмотрим множество Z, содержащее точки A_1, A_2, ..., A_{2k-1}, A_{2k}, A_{2k+1} окружности. Пусть U — множество, которому принадлежат только точки A_1, A_2, ..., A_{2k-1}. По предположению индукции для множества U существует ломаная $L(U)$.

Нетрудно видеть, что существует замкнутая ломаная K, звеньями которой служат отрезки, соединяющие каждую из точек A_1, A_2, ..., A_{2k-1} с точками A_{2k} и A_{2k+1}, и отрезок $A_{2k}A_{2k+1}$, причем среди звеньев ломаной K каждый такой отрезок встречается лишь один раз. Такова, например, ломаная K:

$$A_1A_{2k}A_2A_{2k+1}A_3A_{2k}A_4A_{2k+1}A_5 \ldots$$
$$\ldots A_{2k-1}A_{2k}A_{2k+1}A_1.$$

Заметим, что из отрезков, соединяющих точки множества Z, звеньями ломаной K служат лишь такие отрезки, которые не встречаются среди звеньев ломаной $L(U)$.

Образуем теперь из ломаных $L(U)$ и K одну ломаную следующим образом. За начало ломаной $L(U)$ выберем точку A_1 и, вычертив всю ломаную $L(U)$, возвратимся снова в точку A_1. Затем, отправляясь из точки A_1, опишем ломаную K и снова вернемся в A_1. Мы получим ломаную, начинающуюся и заканчивающуюся в точке A_1. Среди звеньев этой ломаной каждый из отрезков, соединяющих точки множества Z, встречается один и только один раз. Следовательно, нам удалось построить

ломаную $L(Z)$. Тем самым утверждение задачи доказано (методом математической индукции).

97. Предположим, что многочлены

$$P(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$$

и

$$Q(x) = b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3, \quad (1)$$

коэффициенты которых a_i и b_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ — целые числа, причем $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$, имеют общий иррациональный корень α.

Число α является также корнем многочлена

$$R(x) = b_0P(x) - a_0Q(x) = (a_1b_0 - a_0b_1)x^2 + (a_2b_0 - a_0b_2)x + (a_3b_0 - a_0b_3), \quad (2)$$

поскольку $R(\alpha) = b_0P(\alpha) - a_0Q(\alpha) = 0$. Возможен один из двух случаев.

а) $a_1b_0 - a_0b_1 \neq 0$. Тогда $R(x)$ — многочлен второй степени по x с целочисленными коэффициентами, поэтому его иррациональный корень α имеет вид $m + n\sqrt{p}$, где m, n, p — рациональные числа, причем число p отлично от квадрата рационального числа, а $n \neq 0$.

Заметим, что

$$P(m + n\sqrt{p}) = a_0(m + n\sqrt{p})^3 + a_1(m + n\sqrt{p})^2 + a_2(m + n\sqrt{p}) + a_3 = M + N\sqrt{p},$$

$$P(m - n\sqrt{p}) = a_0(m - n\sqrt{p})^3 + a_1(m - n\sqrt{p})^2 + a_2(m - n\sqrt{p}) + a_3 = M - N\sqrt{p},$$

где M и N — рациональные числа:

$$M = a_0m^3 + 3a_0mn^2p + a_1m^2 + a_1n^2p + a_2m + a_3,$$

$$N = 3a_0m^2n + a_0n^3p + 2a_1mn + a_2n.$$

Поскольку число $m + n\sqrt{p}$ — корень многочлена $P(x)$, то $M + N\sqrt{p} = 0$. Следовательно, $N = 0$, так как в противном случае выполнялось бы равенство $\sqrt{p} = -M/N$, что невозможно, так как число $\sqrt{p}$ — иррационально, а число M/N — рационально. Но тогда $M=0$,

и, таким образом, $M - N\sqrt{p} = 0$. Это означает, что число $m - n\sqrt{p}$ также является корнем многочлена $P(x)$.

Аналогично можно проверить, что $m - n\sqrt{p}$ — корень многочлена $Q(x)$.

Итак, многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ имеют общий корень $m - n\sqrt{p}$, отличный от корня $m + n\sqrt{p}$, поскольку $n \neq 0$ и $p \neq 0$.

б) $a_1b_0 - a_0b_1 = 0$. В этом случае $R(x)$ — многочлен первой степени по x с целочисленными коэффициентами, обращающийся в нуль, когда независимая переменная x принимает иррациональное значение α. Такой многочлен должен тождественно равняться нулю, или

$$b_0P(x) - a_0Q(x) = 0$$

при всех x. Следовательно, значения, принимаемые многочленами $P(x)$ и $Q(x)$, пропорциональны, каждый корень многочлена $P(x)$ является корнем многочлена $Q(x)$, и наоборот. Многочлен третьей степени $P(x)$, помимо α, имеет еще два корня (вещественных или комплексных) α' и α''. По крайней мере один из них отличен от α, так как если бы выполнялось равенство $\alpha' = \alpha'' = \alpha$, то из выражения $\alpha + \alpha' + \alpha'' = \frac{a_1}{a_0}$ следовало бы, что $\alpha = -\frac{a_1}{3a_0}$, что невозможно, поскольку α — иррациональное, а $-\frac{a_1}{3a_0}$ — рациональное число. Если же, например, $\alpha' \neq \alpha$, то α' — еще один общий корень многочленов $P(x)$ и $Q(x)$. Тем самым утверждение задачи полностью доказано.

98. Ясно, что уравнение

$$x^4 + 4y^4 = 2(z^4 + 4u^4) \qquad (1)$$

имеет решение (0, 0, 0, 0). Докажем, что это единственное решение уравнения (1) в целых числах.

Для доказательства воспользуемся следующей леммой:

если $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — различные неотрицательные целые числа и $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — целые числа, не делящиеся

на натуральное число с, то

$$c^{k_1}x_1 + c^{k_2}x_2 + \ldots + c^{k_n}x_n \neq 0. \qquad (2)$$

Доказательство этого неравенства весьма просто. Пусть, например, k_1 — наименьшее из чисел k_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Запишем тождество

$$c^{k_1}x_1 + c^{k_2}x_2 + \ldots + c^{k_n}x_n = \\ = c^{k_1}\left(x_1 + c^{k_2-k_1}x_2 + \ldots + c^{k_n-k_1}x_n\right).$$

Все слагаемые суммы, стоящей в скобках в правой части тождества, кроме первого слагаемого, делятся на c, так как $k_i - k_1 > 0$ при $i \neq 1$. Первое же слагаемое x_1 по предположению не делится на c. Следовательно, эта сумма отлична от нуля, а поскольку $c^{k_1} \neq 0$, то выполняется неравенство (2).

Предположим, что целые числа x, y, z, u образуют решение уравнения (1). Существуют такие неотрицательные целые числа k, l, m, n, что

$$x = 2^k x_1, \quad y = 2^l y_1, \quad z = 2^m z_1, \quad u = 2^n u_1,$$

где каждое из чисел x_1, y_1, z_1, u_1 нечетно или равно нулю. Подставляя x, y, z, u в уравнение (1), преобразуем его к виду

$$2^{4k}x_1^4 + 2^{4l+2}y_1^4 - 2^{4m+1}z_1^4 - 2^{4n+3}u_1^4 = 0. \qquad (3)$$

Числа $4k$, $4l+2$, $4m+1$, $4n+3$ различны, поскольку дают при делении на 4 различные остатки, поэтому $x_1 = y_1 = z_1 = u_1 = 0$. Действительно, если бы какие-нибудь из чисел x_1, y_1, z_1, u_1 были отличны от нуля, то они были бы нечетными и равенство (3) противоречило бы лемме.

Таким образом, $x = y = z = u = 0$, что и требовалось доказать.

99. Воспользуемся методом математической индукции. При $n = 1$ утверждение задачи верно, поскольку если $x_1 \leqslant 1/2$, то $1 - x_1 \geqslant 1/2$. Предположим, что оно верно при некотором натуральном k, иными словами, если числа $x_1, x_2, \ldots, x_k$ неотрицательны и $x_1 + x_2 + \ldots + x_k \leqslant 1/2$, то $(1 - x_1)(1 - x_2) \ldots (1 - x_k) \geqslant 1/2$.

Докажем, что тогда утверждение задачи выполняется и при $n = k + 1$. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}$ — неотрицательные числа, удовлетворяющие неравенству $x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1} \leqslant 1/2$. Запишем это неравенство в виде $x_1 + x_2 + \ldots + x'_k \leqslant 1/2$, где $x'_k = x_k + x_{k+1}$, в силу чего $x'_k \geqslant 0$.

По предположению индукции

$$(1 - x_1)(1 - x_2) \ldots (1 - x'_k) = (1 - x_1)(1 - x_2) \ldots (1 - x_k - x_{k+1}) \geqslant 1/2.$$

Поскольку $x_k x_{k+1} \geqslant 0$, то $1 - x_k - x_{k+1} \leqslant 1 - x_k - x_{k+1} + x_k x_{k+1} = (1 - x_k)(1 - x_{k+1})$ и поэтому

$$(1 - x_1)(1 - x_2) \ldots (1 - x_k)(1 - x_{k+1}) \geqslant (1 - x_1)(1 - x_2) \ldots (1 - x_k - x_{k+1}) \geqslant 1/2.$$

Таким образом, утверждение задачи выполняется при любом натуральном n.

Примечание. Доказанное нами неравенство допускает следующее обобщение:

если числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ удовлетворяют неравенствам

$$0 \leqslant x_i \leqslant 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

то

$$(1 - x_1)(1 - x_2) \ldots (1 - x_n) \geqslant 1 - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n).$$

100. Пусть σ — сумма квадратов площадей ортогональных проекций граней прямоугольного параллелепипеда на плоскость π.

Если π — плоскость одной из граней прямоугольного параллелепипеда, то сумма σ равна удвоенному квадрату площади этой грани. Прямоугольный параллелепипед, не имеющий формы куба, содержит по крайней мере две различные по площади грани. Следовательно, при проектировании такого прямоугольного параллелепипеда на плоскости не равных по площади граней сумма σ принимала бы различные значения.

Докажем, что для куба с ребром a значение σ не зависит от положения плоскости π, а именно что $\sigma = 2a^4$ при любом положении плоскости π.

Поскольку проекции одной и той же фигуры на параллельные плоскости представляют собой конгруэнтные

фигуры, то в приводимом ниже доказательстве, не ограничивая общности, можно считать, что плоскость π проходит через одну из вершин куба (обозначим эту вершину S), а весь куб лежит в одном из замкнутых[1] полупространств, на которые плоскость π делит все пространство.

Пусть n — луч, проведенный из вершины S в полупространстве, содержащем куб, перпендикулярно плоскости π. Луч n образует с выходящими из вершины S ребрами SA, SB, SC куба углы α, β, γ, каждый из которых $\leqslant 90°$, и поэтому лежит в трехгранном угле $SABC$ с тремя прямыми плоскими углами.

Для вычисления суммы σ воспользуемся теоремой о том, что *площадь ортогональной проекции плоского многоугольника на плоскость π равна произведению площади этого многоугольника на косинус угла наклона его плоскости к плоскости π.*

Углы наклона граней куба, сходящихся в вершине S, к плоскости π равны углам, образуемым перпендикулярными к этим граням ребрами SA, SB, SC куба с лучом n, то есть углам α, β, γ. Следовательно, площади ортогональных проекций граней куба, сходящихся в вершине S, равны $a^2 \cos\alpha$, $a^2 \cos\beta$, $a^2 \cos\gamma$ и

$$\sigma = 2a^4 (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma). \qquad (1)$$

Выберем на луче n произвольную точку M, отличную от вершины S. Пусть M_1, M_2, M_3 — проекции точки M на прямые SA, SB, SC. Тогда

$$SM_1^2 + SM_2^2 + SM_3^2 = SM^2. \qquad (2)$$

Действительно, если ни одна из точек M_1, M_2, M_3 не совпадает с вершиной S, то SM — диагональ прямоугольного параллелепипеда с ребрами SM_1, SM_2, SM_3 (рис. 78). Если одна из этих точек, например M_3, совпадает с вершиной S, то SM — гипотенуза прямоугольного треугольника SMM_1, а если с вершиной S совпадают две из трех точек M_1, M_2, M_3, например M_2 и M_3, то $SM = SM_1$.

[1] Замкнутым полупространством называется множество, которое состоит из точек, лежащих по одну сторону от плоскости (открытое полупространство), и точек самой плоскости.

Подставляя значения $SM_1 = SM \cos \alpha$, $SM_2 = SM \cos \beta$, $SM_3 = SM \cos \gamma$ в соотношение (2), полу-

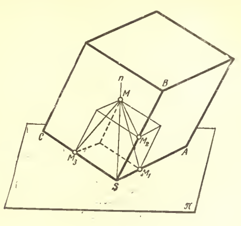


Рис. 78.

чаем

$$SM^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) = SM^2,$$

а поскольку $SM \neq 0$, то

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \qquad (3)$$

Сравнивая соотношения (1) и (3), приходим к окончательному ответу:

$$\sigma = 2a^4,$$

что и требовалось доказать.

101. Пусть $(ABC...)$ означает площадь многоугольника $ABC...$. По условиям задачи (рис. 79)

$$(ABCD) = {}^1/_2\,(ABCDEF) = (BCDE). \qquad (1)$$

Кроме того,

$$(ABCD) = (ABD) + (DBC), \ (BCDE) = (EBD) + (DBC). \quad (2)$$

Из соотношений (1) и (2) получаем

$$(ABD) = (EBD).$$

Отсюда следует, что $AE \parallel BD$, поскольку вершины A и E треугольников ABD и EDB, имеющих общую сторону, лежат в одной полуплоскости относительно прямой BD.

Аналогично можно доказать, что $AC \parallel DF$ и $CE \parallel BF$.

Пусть M — точка пересечения диагоналей AD и BE. Поскольку заданный шестиугольник выпуклый, то такая точка существует. Рассмотрим гомотетию с центром M,

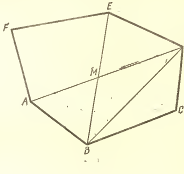


Рис. 79.

отображающую точку A в точку D. Точку E эта гомотетия переводит в точку B, поскольку B — общая точка прямой EM и образа прямой AE — проведенной через точку D прямой, параллельной прямой AE. Точку C рассматриваемая нами гомотетия переводит в точку F, поскольку F — общая точка образов прямых AC и EC, а именно: проведенной через точку D прямой, параллельной прямой AC, и проведенной через точку B прямой, параллельной прямой EC. Следовательно, прямая CE проходит через центр M гомотетии и поэтому диагонали AD, BE, CF имеют общую точку, что и требовалось доказать.

102. Введем следующие обозначения. Пусть Z — множество заданных точек $A_1, A_2, \ldots, A_6$, d — длина наибольшего из отрезков A_iA_k, δ — длина наименьшего из отрезков A_iA_k $(i, k = 1, 2, \ldots, 6,\ i \neq k)$.

Требуется доказать, что $d \geqslant \delta\sqrt{3}$. Справедливость этого неравенства легко устанавливается следующими рассуждениями.

а) В множестве Z существуют 3 точки, лежащие на одной прямой. Пусть, например, точка A_2 лежит на отрезке A_1A_3, причем $A_1A_2 \leqslant A_2A_3$. Тогда $A_1A_3 \geqslant 2A_1A_2$, $d \geqslant A_1A_3$, $\delta \leqslant A_1A_2$ и, следовательно, $d \geqslant 2\delta > \delta\sqrt{3}$.

б) Три точки из множества Z образуют треугольник, один из углов которого не меньше 120°. Пусть, например, $180° > \angle A_1A_2A_3 \geqslant 120°$. Тогда $\cos(\angle A_1A_2A_3) \leqslant -1/2$ и $A_1A_3^2 = A_1A_2^2 + A_2A_3^2 - 2A_1A_2 \cdot A_2A_3 \cos(\angle A_1A_2A_3) \geqslant A_1A_2^2 + A_2A_3^2 + A_1A_2 \cdot A_2A_3$. Так как $A_1A_3 \leqslant d$, $A_1A_2 \geqslant \delta$, $A_2A_3 \geqslant \delta$, то из полученного неравенства следует, что

$$d^2 \geqslant 3\delta^2, \quad \text{или} \quad d \geqslant \delta\sqrt{3}.$$

Предположим, что данное множество Z не обладает свойством, рассмотренным в пункте (а). Докажем, что тогда оно непременно обладает свойством, рассмотренным в пункте (б).

Пусть W — выпуклый многоугольник, содержащий множество Z и такой, что каждая вершина W совпадает с одной из точек A_i. Многоугольник W может иметь 3, 4, 5 или 6 вершин.

Если W — треугольник (например, треугольник $A_1A_2A_3$), то точка A_4 лежит внутри этого треугольника. По крайней мере у одного из треугольников $A_1A_4A_2$, $A_1A_4A_3$, $A_2A_4A_3$ угол при вершине A_4 не меньше 120°, поскольку сумма всех трех углов при вершине A_4 равна 360°.

Если W — четырехугольник (например, четырехугольник $A_1A_2A_3A_4$) или пятиугольник (например, пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$), то W можно разбить на треугольники диагоналями, выходящими из одной вершины. Точка A_6 находится внутри одного из таких треугольников, поэтому рассматриваемый случай сводится к предыдущему.

Наконец, если W — шестиугольник, то сумма его внутренних углов равна 720°. Следовательно, наибольший из этих углов $\geqslant 120°$ и определяет треугольник, рассмотренный в пункте (б).

Таким образом, множество Z всегда содержит либо 3 точки, лежащие на одной прямой, либо 3 точки, образующие треугольник, один из углов которого не меньше 120°.

Тем самым утверждение задачи выполняется для любого множества, содержащего 6 произвольно выбранных точек плоскости.

Примечание. В приведенном выше решении мы воспользовались тем, что для любого множества $n \geqslant 3$ точек плоскости, не лежащих на одной прямой, существует выпуклый многоугольник, содержащий все множество и такой, что его вершины совпадают с точками множества. Существование такого многоугольника (назовем его выпуклой оболочкой данного множества) интуитивно очевидно. Выберем на поверхности стола любое число точек, воткнем в каждую из них булавку, а затем накинем на них тугую резинку так, чтобы она, стянувшись, охватила все булавки. Резинка зацепится за некоторые булавки и примет форму выпуклого многоугольника, объемлющего все булавки. Разумеется, эти наглядные соображения отнюдь не заменяют строгого доказательства существования выпуклой оболочки, к которому мы сейчас переходим.

Воспользуемся методом математической индукции. Для множества $n = 3$ точек, не лежащих на одной прямой, доказываемое утверждение верно: выпуклой оболочкой множества служит треугольник, образуемый точками множества. Предположим, что выпуклая оболочка существует при некотором n. Докажем, что тогда то же самое справедливо и для $n + 1$ точки. Пусть множество Z состоит из $(n + 1)$ точек плоскости, не лежащих на одной прямой. Выберем на плоскости произвольную точку M и обозначим A_1 точку множества Z, наиболее удаленную от M (если имеется несколько таких точек, то A_1 может быть любой из них). Тогда все точки множества Z, кроме A_1, лежат по одну сторону от прямой, проведенной через точку A_1 перпендикулярно прямой A_1M.

Поскольку точки множества Z не лежат на одной прямой, то существуют 2 луча p и q, исходящих из точки A_1, которые проходят через какие-то точки множества Z и образуют выпуклый угол, содержащий все множество Z. Пусть A_2 — ближайшая к A_1 из точек множества Z, лежащих на луче p, а A_3 — аналогичная точка на луче q. Если все остальные точки A_4, A_5, ..., A_{n+1} множества Z лежат в треугольнике $A_1A_2A_3$, то он служит выпуклой оболочкой множества Z. В противном случае для множества точек A_2, A_3, ..., A_{n+1} по предположению индукции существует выпуклая оболочка P, причем точки A_2 и A_3 служат вершинами многоугольника P (рис. 80), поскольку P содержится в угле $A_2A_1A_3$.

Точки A_2 и A_3 делят периметр многоугольника P на две части: одна из них, которую мы обозначим L_1, лежит (за исключением концов A_2 и A_3) по другую сторону от прямой A_2A_3, чем точка A_1, другая (ее мы обозначим L_2) находится в треугольнике $A_1A_2A_3$. Ломаная L_1 вместе с ломаной $A_2A_3A_1$ ограничивают многоугольник Q, который получается, если к многоугольнику P присоединить треугольник $A_1A_2A_3$.

Нетрудно видеть, что: 1) многоугольник Q, в который входят многоугольник P и точка A_1, содержит все множество Z; 2) каждая вершина многоугольника Q совпадает с одной из

точек множества Z; 3) многоугольник Q выпуклый, так как отрезок, соединяющий любые две его точки A и B, целиком лежит в Q. Выпуклость многоугольника Q очевидна, если точки A и B лежат либо обе в треугольнике $A_1A_2A_3$, либо обе в многоугольнике P. Если же, например, точка A находится в треугольнике $A_1A_2A_3$, а точка B — в многоугольнике P вне треугольника, то отрезок AB пересекает отрезок A_2A_3 в некоторой точке C,

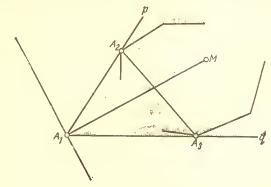


Рис. 80.

а каждый из отрезков AC и CB лежит в многоугольнике Q. Следовательно, отрезок AB также лежит в многоугольнике Q.

Таким образом, многоугольник Q является выпуклой оболочкой множества точек $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$. Тем самым утверждение о существовании выпуклой оболочки любого конечного множества точек на плоскости полностью доказано.

103. В конечном наборе чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ существует по крайней мере одно число, например a_r, которое не меньше всех чисел, входящих в набор, то есть $a_i \leqslant a_r$ при $i = 1, 2, \ldots, n$. Пусть s — наименьший из индексов, для которых выполняется равенство $a_s = a_r$. Докажем, что $s = 1$. Действительно, при $s > 1$ выполнялись бы неравенства

$$a_{s-1} < a_s \quad \text{(по определению индекса } s\text{)},$$

$$a_{s+1} \leqslant a_s \quad (\text{так как } a_s = a_r).$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$a_{s-1} + a_{s+1} < 2a_s,$$

что невозможно, поскольку по условиям задачи $a_{s-1} + a_{s+1} \geqslant 2a_s$.

Но если $s = 1$, то $a_r = a_1 = 0$ и поэтому $a_i \leqslant 0$ при $i = 1, 2, \ldots, n$.

Примечание. В приведенном выше решении мы сослались на утверждение о том, что в каждом конечном множестве чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ существует число a_r, для которого при $i = 1, 2, \ldots, n$ выполняется неравенство $a_i \leqslant a_r$.

Это утверждение, известное как принцип наибольшего числа, является очевидным следствием принципа математической индукции, и наоборот, принцип математической индукции можно вывести из принципа наибольшего числа.

104. Обозначим сидящих в зале $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$. Пусть M — множество $\{A_1, A_2, \ldots, A_{33}\}$, N — множество $\{A_{34}, A_{35}, \ldots, A_{66}\}$ и P — множество $\{A_{67}, A_{68}, \ldots, A_{100}\}$. Случай, о котором говорится в задаче, может представиться, например, если каждый из тех, кто входит в множество M, знаком с теми и только с теми, кто входит либо в множество N, либо в множество P (всего 67 человек), и аналогично каждый из тех, кто входит в множество N, знаком с теми и только с теми, кто входит в множества P и M (всего 67 человек), а каждый из тех, кто включен в множество P, знаком с теми и только с теми, кого мы отнесли к множествам M и N (всего 66 человек). Действительно, если (A_i, A_j, A_k, A_e) — любые четыре человека из числа находящихся в зале, то два из них заведомо входят в одно и то же множество M, N или P и поэтому не знакомы друг с другом. Тем самым утверждение задачи доказано.

Примечание. Утверждение задачи нетрудно обобщить. *Предположим, что в зале находятся n человек, каждый из которых знаком по крайней мере с $[2n/3]$*[1] *из присутствующих. Тогда может представиться случай, когда двое из любых четырех человек, находящихся в зале, не будут знакомы друг с другом.* Доказательство этого утверждения проводится так же, как доказательство утверждения задачи.

105. Пусть A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3 — вершины данных треугольников, а MN — такой отрезок, что, во-первых, точка M лежит на периметре треугольника $A_1A_2A_3$, во-вторых, точка N лежит на периметре треугольника $B_1B_2B_3$ и, в-третьих, MN не длиннее любого из отрезков,

---

[1] $[x]$ означает целую часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x.

соединяющих точки на периметре треугольника $A_1A_2A_3$ с точками на периметре треугольника $B_1B_2B_3$.

Отрезок MN можно построить следующим образом. Для каждой из девяти троек (A_i, B_j, B_k), где i, j, k принимают значения 1, 2 или 3, причем $j < k$, выберем кратчайший из отрезков, соединяющих точку A_i с точками отрезка B_jB_k. Этот отрезок совпадает с высотой треугольника $A_iB_jB_k$, опущенной из вершины A_i, или с одним из отрезков A_iB_j, A_iB_k. Аналогичным образом для каждой из девяти троек (B_i, A_j, A_k) выберем кратчайший из отрезков, соединяющих точку B_i с точками отрезка A_jA_k. Наконец, выберем кратчайший из полученных 18 отрезков (некоторые отрезки могут совпадать), то есть отрезок, не превосходящий по длине ни один из 17 остальных отрезков. Пусть M — конец этого отрезка, лежащий на периметре треугольника $A_1A_2A_3$, а N — другой конец того же отрезка, лежащий на периметре треугольника $B_1B_2B_3$. Отрезок MN удовлетворяет третьему из перечисленных выше условий (не длиннее любого из отрезков, соединяющих точки на периметрах треугольников $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$). Действительно, для любого отрезка, соединяющего точку K на периметре первого треугольника с точкой L на периметре второго треугольника

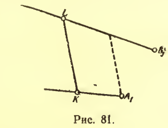


Рис. 81.

(рис. 81), существует параллельный и не превосходящий его по длине отрезок, соединяющий вершину одного треугольника с точкой на стороне другого треугольника, а такой отрезок не длиннее отрезка MN. Итак, построен отрезок MN, обладающий всеми необходимыми свойствами.

Проведем через точки M и N прямые m и n, перпендикулярные отрезку MN (рис. 82). Внутри полосы, ограниченной прямыми m и n, нет ни одной из точек, при-

надлежащих треугольникам $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$. (Если бы внутри этой полосы находилась бы, например, точка P, принадлежащая треугольнику $A_1A_2A_3$, то весь отрезок PM также принадлежал бы треугольнику $A_1A_2A_3$. Но угол PMN острый, поэтому между точками P и M можно было бы найти точку Q, такую, что $QN < MN$, а это противоречило бы выбору отрезка MN.)

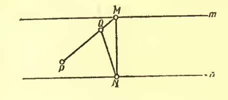


Рис. 82.

Возможен один из следующих случаев.

а) Точки M и N совпадают с вершинами треугольников $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$. Например, предположим, что точка M совпадает с вершиной A_1, а точка N — с вершиной B_1 (рис. 83). Рассмотрим углы с вершиной A_1, образуемые

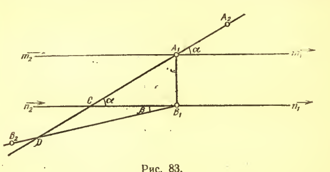


Рис. 83.

лучами A_1A_2 и A_1A_3 с лучами m_1 и m_2, на которые разбивает прямую m точка A_1, и углы с вершиной B_1, образуемые лучами B_1B_2 и B_1B_3 с лучами n_1 и n_2. Пусть угол, образуемый лучом A_1A_2 с лучом n_1, — наименьший из этих углов. Тогда A_1A_2 — прямая, существование которой нам требовалось доказать.

Действительно, угол α либо острый, либо равен нулю. Если $\alpha = 0$, то прямая A_1A_2 совпадает с прямой m. Следовательно, точка A_3 лежит по одну сторону от прямой A_1A_2, а точки B_1, B_2, B_3 по другую сторону от нее. К аналогичному заключению мы приходим и в том случае, когда угол α острый и прямая A_1A_2 пересекает прямую n в точке C. Действительно, точка A_3 лежит по другую сторону от прямой A_1A_2, чем точка B_1 (поскольку выпуклый угол, образуемый лучом A_1A_3 с прямой m больше α). Что же касается точек B_2 и B_3, то они расположены по ту же сторону от прямой A_1A_2, что и точка B_1. Если бы, например, точка B_2 лежала по другую сторону от прямой A_1A_2, чем точка B_1, или на прямой A_1A_2, то на отрезке B_1B_2 находилась бы некоторая точка D прямой A_1A_2 и $\angle DB_1C = \beta$ был бы вопреки предположению меньше угла α, поскольку $\angle B_1CA_1$, равный α, был бы внешним углом треугольника DB_1C.

б) По крайней мере одна из точек M и N не совпадает с вершинами треугольников $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$. Например, точка M лежит на стороне A_1A_2 треугольника $A_1A_2A_3$. Тогда вся сторона A_1A_2 лежит на прямой m и прямая m отделяет вершину A_3 от вершин B_1, B_2, B_3.

Итак, утверждение задачи доказано.

106.[1] Пусть Z — множество людей, находящихся в зале.

Наши рассуждения существенно упрощаются, если мы условимся считать, что каждый из тех, кто находится в зале, знаком сам с собой. Такое соглашение не меняет утверждения задачи, которое требуется доказать. Приняв его, мы можем утверждать, что каждый $X \in Z$ не знаком не более чем с 32 членами множества Z.

Пусть A — произвольно выбранный член множества Z. Если все, кто не знаком с A, покинут зал, то множество Z_1 оставшихся в зале будет насчитывать не менее $100 - 32 = 68$ человек. Пусть B — любой из тех, кто включен в множество Z_1, но не A. Если теперь зал покинут все, кто не знаком с B, то оставшиеся в зале образуют множество Z_2, в котором насчитывается не менее $68 - 32 = 36$ человек. Пусть C — кто-нибудь из тех, кто входит в множество Z_2, но не A и не B. После того, как

[1] См. также задачу 104.

зал покинут те, кто включен в множество Z_2, но не знаком с C, оставшиеся в зале образуют множество Z_3, в котором насчитывается не менее 36—32 человека. Следовательно, в Z_3 входит по крайней мере один человек помимо A, B, C. Если мы обозначим его D, то A, B, C и D образуют четверку людей, знакомых друг с другом, так как B знаком с A, C знаком с A и B, а D знаком с A, B и C.

Примечание. Справедливо также более общее утверждение:

если в зале находятся n человек, каждый из которых знаком по крайней мере с $[2n/3]+1$ из остальных присутствующих, то в зале найдутся четыре таких человека, каждый из которых знает трех других.

Доказательство его аналогично приведенному выше.

107. Предположим, что точки A, B, C, D, E удовлетворяют условиям (1) и (2). Докажем сначала, что никакие две из этих точек не могут совпадать. Для этого достаточно доказать, что точка A не может совпадать ни с точкой B, ни с точкой C, поскольку все остальные случаи сводятся к одному из этих при надлежащем изменении обозначений.

а) Если бы точка A совпадала с точкой B, то в силу равенств (1) совпадали бы все 5 точек и не выполнялось бы условие (2), так как все входящие в него углы не существовали бы.

б) Если бы точка A совпадала с точкой C, то угол ABC был бы равен 0 и, следовательно, в силу условий (2) точки A, B, D, E лежали бы на одной прямой p. Равенства $\angle BAD = 0$ и $\angle EAB = 0$ означали бы, что точки B, D, E лежат на прямой p по одну сторону от точки A. Но тогда равенство $\angle DEA = 0$ позволяет утверждать, что точка D лежит между точками A и E, а это противоречит равенству $\angle CDE = \angle ADE = 0$. Таким образом, случай (б) отпадает.

Из равенства всех сторон и всех углов пятиугольника $ABCDE$ следует, что все его диагонали равны. Например, $AC = BD$, так как треугольники ABC и BCD конгруэнтны. Пусть a — длина сторон, b — диагоналей пятиугольника, а $O(r)$ — сфера с центром в точке O и радиусом r.

Выберем три идущие не подряд вершины пятиугольника, например вершины A, B, D, и рассмотрим положение

остальных вершин C и E относительно выбранных. Вершина C принадлежит одновременно сферам $A(b)$, $B(a)$ и $D(a)$, а вершина E — сферам $B(b)$, $A(a)$ и $D(a)$, в которые сферы $A(b)$, $B(a)$ и $D(a)$ переходят при отражении в плоскости σ, проходящей через середину отрезка AB перпендикулярно ему. При этом преобразовании точке C соответствует точка E', принадлежащая одновременно сферам $A(a)$, $B(b)$, $D(a)$. Следовательно, возможен один из двух случаев.

α) Точка E совпадает с точкой E', то есть точки C и E расположены симметрично относительно плоскости σ, проходящей через середину отрезка AB перпендикулярно ему. Тогда диагональ CE параллельна прямой AB и точки A, B, C, E лежат в одной плоскости.

β) Точка E, принадлежащая одновременно сферам $A(a)$, $B(b)$, $D(a)$, отлична от точки E', также принадлежащей всем этим сферам. Тогда точка E симметрична точке E' относительно плоскости ABD, проходящей через центры рассматриваемых сфер. Следовательно, точка E симметрична точке C относительно прямой пересечения плоскостей ABD и σ, то есть относительно прямой DM, проходящей через середину отрезка AB перпендикулярно ему. В этом случае диагональ CE пересекает прямую DM в некоторой точке N.

Аналогичные утверждения справедливы для любой диагонали пятиугольника $ABCDE$. Если при рассмотрении каких-нибудь двух диагоналей мы встречаемся со случаем (α), то существуют 2 четверки вершин пятиугольника, каждая из которых лежит в одной плоскости. Следовательно, все вершины пятиугольника также лежат в одной плоскости.

Если при рассмотрении хотя бы трех диагоналей пятиугольника мы встречаемся со случаем (β), то две из этих трех диагоналей выходят из одной вершины. Пусть, например, ими будут диагонали CE и CA. Тогда диагональ CE пересекает прямую DM, проходящую через середину отрезка AB перпендикулярно ему, в некоторой точке N, а диагональ CA пересекает прямую BK, проходящую через середину отрезка DE перпендикулярно ему, в некоторой точке L. Следовательно, точки D, E, C, K, M, N расположены в одной плоскости. Аналогичное утверждение справедливо и относительно точек A, B, C, K, L, M. Таким образом, все перечисленные точки лежат

в одной плоскости (рис. 84). Тем самым утверждение задачи доказано.

Примечание. Приведенное выше решение задачи можно значительно сократить, если воспользоваться свойствами изометрии, то есть преобразований, не изменяющих расстояний между точками. Точкам A, B, C, D поставим в соответствие точки B, A, E, D. В силу равенства сторон и диагоналей пятиугольника отображение первой четверки точек на вторую представляет собой изометрию. Это преобразование можно продолжить до изометрического преобразования всего пространства.

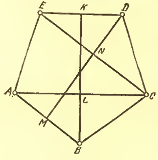


Рис. 84.

Известно, что изометрия пространства, переводящая точки A, B, D в точки B, A, D, является отражением относительно плоскости σ, проходящей через середину отрезка AB перпендикулярно ему, или отражением относительно прямой MD, проходящей через середину того же отрезка перпендикулярно ему. Таким образом, точка E симметрична точке C относительно плоскости σ или прямой MD. В остальном ход доказательства остается без изменений.

108. Предположим, что многоугольник W, вершины которого обозначены по порядку $A_1, A_2, \ldots, A_n$, где n — нечетное число, имеет равные внутренние углы и вписан в окружность с центром O. При $n = 3$ утверждение задачи очевидно, поэтому в дальнейшем мы будем предполагать, что $n \geqslant 5$.

Пусть A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, где $i = 1, 2, \ldots, n$, причем $A_0 = A_n$, $A_{n+1} = A_1$ — три идущие подряд вершины многоугольника W и пусть $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1} = \alpha$ (рис. 85). Так как $n \geqslant 5$, то $\alpha \geqslant 108°$. Следовательно, дуга $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ меньше полуокружности и четырехугольник $OA_{i-1}A_iA_{i+1}$ выпуклый.

По теореме об углах, вписанных в окружность, невыпуклый угол $A_{i-1}OA_{i+1} = 2\alpha$, а выпуклый угол $A_{i-1}OA_{i+1} = 360° - 2\alpha = \beta$. Повернем многоугольник W вокруг точки O на угол β, например, в направлении, задаваемом нумерацией вершин $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Вершина A_{i-1} после поворота перейдет в точку A_{i+1}, то есть каждая вершина многоугольника W в новом положении сов-

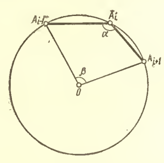


Рис. 85.

падет с вершиной, номер которой на 2 больше, причем A_{n-1} перейдет в A_1, а A_n — в A_2. Таким образом, точки

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots,\ A_{n-2},\ A_{n-1},\ A_n \qquad (1)$$

совместятся с точками

$$A_3,\ A_4,\ A_5,\ \ldots,\ A_n,\ A_1,\ A_2. \qquad (2)$$

Каждый отрезок, соединяющий две точки из упорядоченного множества (1), перейдет в отрезок, соединяющий образы этих точек из упорядоченного множества (2). Следовательно, при нечетном n

$$A_1A_2 = A_3A_4 = A_5A_6 = \ldots = A_{n-2}A_{n-1} = A_nA_1$$

и

$$A_2A_3 = A_4A_5 = A_6A_7 = \ldots = A_{n-1}A_n = A_1A_2,$$

то есть все стороны многоугольника равны, что и требовалось доказать.

109. Пусть $f(x)$ — многочлен относительно переменной x с целочисленными коэффициентами и

$$|f(a)| = |f(b)| = |f(c)| = 1, \qquad (1)$$

где a, b, c — три различных целых числа.

Предположим, что x_0 — целочисленный корень многочлена $f(x)$. Тогда при любом x

$$f(x) = (x - x_0)\varphi(x), \qquad (2)$$

где $\varphi(x)$ — многочлен с целочисленными коэффициентами.

Из соотношений (1) и (2) получаем

$$|(a - x_0)\varphi(a)| = |a - x_0| \cdot |\varphi(a)| = 1.$$

Число $|a - x_0|$ — целое, положительное и является делителем единицы, поскольку $|\varphi(a)|$ — целое число. Следовательно,

$$|a - x_0| = 1.$$

Аналогичным образом можно доказать, что $|b - x_0| = 1$, $|c - x_0| = 1$.

Полученные равенства означают, что какие-то два из трех чисел $a - x_0$, $b - x_0$, $c - x_0$ равны. Но тогда и какие-то два из трех чисел a, b, c также равны, что невозможно, так как по предположению a, b и c — различные числа. Полученное противоречие доказывает, что многочлен $f(x)$ не имеет целочисленных корней. Тем самым утверждение задачи доказано.

Примечание. В приведенном выше решении мы упомянули о том, что $\varphi(x)$ — многочлен с целочисленными коэффициентами. Это утверждение нетрудно доказать.

Пусть

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$
$$\varphi(x) = c_0x^{n-1} + c_1x^{n-2} + \ldots + c_{n-2}x + c_{n-1}.$$

Из равенства $f(x) = (x - x_0)\varphi(x)$, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой части, получаем

$$a_0 = c_0, \quad a_k = c_k - x_0c_{k-1} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

откуда

$$c_0 = a_0, \quad c_k = a_k + x_0c_{k-1}.$$

Отсюда следует, что c_0 — целое число и если коэффициент c_{k-1} равен целому числу ($k = 1, 2, \ldots, n-1$), то коэффициент c_k также целый. Таким образом, все числа $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ целые.

110. Перенумеруем сидящих за столом последовательными натуральными числами от 1 до n $(n \geqslant 5)$. Предположим, что номер 1 за столом сидит рядом с номерами n и 2, номер 2 — рядом с номером 1 и 3 и так далее, наконец, номер n сидит рядом с номерами $n-1$ и 1. Кратко о таком распределении чисел 1, 2, ..., n говорят, что они образуют цикл

$$1, 2, 3, \ldots, n. \tag{1}$$

Пусть n — нечетное число. Образуем из чисел от 1 до n цикл

$$1, 3, \ldots, n, 2, 4, \ldots, n-1, \tag{2}$$

в котором за последовательными нечетными числами идут последовательные четные числа. Нетрудно видеть, что в цикле (2) каждое число имеет иных соседей, чем в цикле (1). Различия в распределении чисел, образующих циклы (1) и (2), сводятся к следующему:

1) Каждое нечетное число, за исключением чисел 1 и n, соседствует в цикле (1) с четными числами, а в цикле (2) — с нечетными числами;

2) каждое четное число, за исключением чисел 2 и $n-1$, соседствует в цикле (1) с нечетными числами, а в цикле (2) — с четными числами;

3) число 1 в цикле (1) соседствует с числами n и 2, а в цикле (2) — с числами $n-1$ и 3, отличными от чисел n и 2 при $n \geqslant 5$.

Числа 2, $n-1$, n в цикле (1) соседствуют с числами 1 и 3, $n-2$ и n, $n-1$ и 1, а в цикле (2) — с числами n и 4, $n-3$ и 1, $n-2$ и 2.

Предположим далее, что n — четное число; образуем из чисел от 1 до n цикл

$$1, 3, \ldots, n-1, 2, \ldots, n-2, n,$$

в котором, как и в цикле (2), за последовательными нечетными числами идут последовательные четные числа, и переставим в нем числа $n-2$ и n:

$$1, 3, \ldots, n-1, 2, 4, \ldots, n-4, n, n-2. \tag{3}$$

Распределение чисел в цикле (3) обладает следующими особенностями:

1) каждое из нечетных чисел 3, 5, ..., $n-3$ соседствует с нечетными числами;

2) каждое из четных чисел 4, 6, ..., $n-4$ соседствует с четными числами;

3) числа 1, 2, $n-1$, $n-2$ соседствуют с числами 3 и $n-2$, $n-1$ и 4, $n-3$ и 2, n и 1.

Нетрудно видеть, что у каждого числа в цикле (3) соседи иные, чем в цикле (1). Тем самым утверждение задачи доказано.

111. Пусть Z — конечное множество чисел, $l(Z)$ — число различных значений, принимаемых суммой двух чисел, каждое из которых принадлежит множеству Z.

Пусть A — множество $n>2$ попарно различных чисел a_i ($i=1, 2, \ldots, n$), обозначенных так, что

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_n. \qquad (1)$$

Поскольку

$$a_1+a_2 < a_1+a_3 < \ldots < a_1+a_n < \\ < a_2+a_n < a_3+a_n < \ldots < a_{n-1}+a_n, \qquad (2)$$

то множество сумм a_i+a_j содержит по крайней мере $2n-3$ различных чисел, то есть $l(A) \geqslant 2n-3$.

Следовательно, если нам удастся составить множество A так, чтобы выполнялось равенство $l(A)=2n-3$, то тем самым первая часть задачи будет решена. Для этого необходимо выбрать числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ так, чтобы каждая сумма a_i+a_j была равна какому-нибудь из чисел, входящих в неравенства (2), то есть одной из сумм a_1+a_j ($j=2, 3, \ldots, n$) или одной из сумм a_i+a_n ($i=2, 3, \ldots, n-1$).

Докажем, что этим свойством обладает множество чисел A, образующих арифметическую прогрессию.

Предположим, что

$$a_2-a_1=a_3-a_2= \ldots =a_n-a_{n-1}=d.$$

По формуле общего члена арифметической прогрессии

$$a_k=a_1+(k-1)d=a_n-(n-k)d \qquad (3)$$

при $k=1, 2, \ldots, n$. Рассмотрим суммы a_i+a_j, где $1 \leqslant i < j \leqslant n$. При $i+j \leqslant n$ формула (3) приводит к следующему соотношению для сумм:

$$a_i+a_j=a_1+(i-1)d+a_1+(j-1)d= \\ =a_1+a_1+(i+j-2)d=a_1+a_{i+j-1}, \qquad (4)$$

а при $i+j>n$ — к соотношению

$$a_i+a_j=a_1+(i-1)d+a_n-(n-j)d=$$
$$=a_n+a_1+(i+j-n-1)d=a_{i+j-n}+a_n. \qquad (5)$$

Из соотношений (4) и (5) следует, что каждая из сумм a_i+a_j совпадает с одной из сумм (2), поэтому $l(A)=2n-3$. Тем самым множество чисел, обладающее требуемым свойством, построено.

Множество чисел $B=\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, суммы которых b_i+b_j ($i, j=1, 2, \ldots, n$; $i\neq j$) принимают наибольшее число $l(B)$ различных значений, нам удастся найти в том случае, если значения любых двух сумм b_i+b_j не будут совпадать. Для такого множества $l(B)=\frac{1}{2}n(n-1)$.

Требуемым свойством обладает, например, сумма членов геометрической прогрессии

$$1,\ q,\ q^2,\ \ldots,\ q^{n-1}, \qquad (6)$$

знаменатель которой q — натуральное число больше 1.

Действительно, предположим, что для каких-то членов геометрической прогрессии (6) выполняется соотношение

$$q^i+q^j=q^k+q^l, \quad \text{где} \quad i<j, \quad k<l. \qquad (7)$$

Тогда

$$q^i(1+q^{j-i})=q^k(1+q^{l-k}). \qquad (8)$$

Поскольку числа $1+q^{j-i}$ и $1+q^{l-k}$ взаимно просты с знаменателем прогрессии q, то из равенства (8) следует, что q^k делится на q^i, а q^i — на q^k. Следовательно, $k=i$, а из равенства (7) получаем, что и $l=j$. Это означает, что равенство (7) может выполняться лишь в том случае, если члены геометрической прогрессии q^i, q^j совпадают с q^k, q^l.

Таким образом, для множества B чисел (6) действительно достигается равенство $l(B)=\frac{1}{2}n(n-1)$.

Примечание 1. Можно доказать, что при $n\geqslant 5$ любое множество A, состоящее из n различных чисел, для которого $l(A)=2n-3$, представляет собой множество членов арифметической прогрессии. При $n=3$ и $n=4$ это утверждение, как нетрудно видеть, неверно.

Примечание 2. Можно привести много примеров множеств чисел $B=\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, для которых $l(B)=\frac{1}{2}n(n-1)$. Например, этим свойством обладает множество n последовательных чисел Фибоначчи[1], то есть чисел b_n, заданных рекуррентным соотношением $b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$ $(n > 2)$, $b_1 = 0$, $b_2 = 1$.

112. Докажем сначала следующую лемму.

Если $n \geqslant 3$ и $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — точки плоскости, не лежащие на одной прямой, то существует прямая, проходящая через две и только две из точек A_s.

Доказательство. Из условий леммы следует, что некоторые тройки точек A_s не лежат на одной прямой. Пусть A_i, A_k, A_l — одна из таких троек и d_{ikl} — расстояние от точки A_i до прямой A_kA_l. Множество чисел d_{ikl} конечно, и в нем существует наименьшее число (остальные числа больше или равны ему). Не ограничивая общности, можно считать таким числом, например, число d_{123}, поскольку в противном случае достаточно лишь надлежащим образом изменить нумерацию точек (рис. 86).

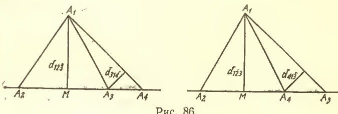


Рис. 86.

Пусть M — основание перпендикуляра, опущенного из точки A_1 на прямую A_2A_3. Точки A_2 и A_3 расположены на этой прямой по разные стороны от точки M, так как A_1M — наименьшая из высот и, следовательно, A_2A_3 — наибольшая из сторон треугольника $A_1A_2A_3$. Таким образом, углы при вершинах A_2 и A_3 треугольника $A_1A_2A_3$ должны быть острые.

Это означает, что на прямой A_2A_3 нет других точек A_l. Действительно, если бы на прямой A_2A_3 лежала, например, точка A_4 (для определенности предположим, что она находилась бы на луче MA_3), то выполнялось бы

[1] Фибоначчи, известный также под именем Леонардо Пизанского (около 1170—1250),— итальянский купец и один из наиболее выдающихся математиков средних веков.

неравенство $d_{413} < d_{123}$ (точка A_4 лежит на отрезке MA_3), либо неравенство $d_{314} < d_{123}$ (точка A_4 лежит на продолжении отрезка MA_3). Оба неравенства противоречат выбору числа d_{123}.

Доказанная лемма позволяет без труда решить исходную задачу методом математической индукции.

При $n = 3$ утверждение задачи верно, поскольку в этом случае $k = 3$. Предположим, что утверждение задачи выполняется при некотором натуральном $n \geqslant 3$. Докажем, что тогда оно выполняется и при $n + 1$. Пусть $Z = \{A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}\}$ — множество точек плоскости, не лежащих на одной прямой, и A_1A_{n+1} прямая, проходящая ровно через две точки множества Z. Из условий задачи следует, что по крайней мере в одном из n — точечных множеств $Z_1 = \{A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n\}$ и $Z_2 = \{A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_{n+1}\}$ — существуют тройки точек, не лежащих на одной прямой. Пусть, например, этим свойством обладает множество Z_1. По предположению индукции число прямых, проведенных через всевозможные пары точек множества Z_1, не меньше n. Поскольку прямая A_1A_{n+1} не принадлежит к числу этих прямых, так как проходит лишь через одну точку множества Z_1, то число прямых, проходящих через любые всевозможные пары точек множества Z, не меньше $n + 1$. Итак, утверждение задачи доказано по индукции.

113. Докажем утверждение задачи методом математической индукции. При $n = 4$ утверждение верно. Предположим, что оно выполняется при некотором $n \geqslant 4$. Докажем, что тогда оно выполняется и при $n + 1$. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ — такие точки плоскости, что любые 4 из них располагаются в вершинах выпуклого четырехугольника. По предположению индукции точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ служат вершинами выпуклого многоугольника W. Будем считать, что эти точки перечислены в том порядке, в котором они встречаются при обходе многоугольника W по периметру (этого всегда можно добиться подходящим выбором нумерации точек). Точка A_{n+1} не лежит на периметре многоугольника W, поскольку никакие 3 точки A_i не лежат на одной прямой. Эта точка не может находиться и внутри многоугольника W, так как любая точка внутри W принадлежит одному из треугольников, на которые разбивают W его диагонали, а точка

A_{n+1} не может находиться в таком треугольнике. Таким образом, точка расположена вне многоугольника W. Рассмотрим выпуклые углы с вершинами в точке A_{n+1}, стороны которых проходят через вершины многоугольника W. Поскольку множество таких углов конечно, то среди них существует наибольший. Пусть например, это будет угол $\alpha = \angle A_k A_{n+1} A_l$. Внутри угла α лежат все вершины многоугольника W, кроме A_k и A_l. В треугольнике T с вершинами A_k, A_{n+1}, A_l не содержится ни одна вершина многоугольника W, отличная от A_k и A_l, так как точки A_i, A_k, A_l, A_{n+1} по условиям задачи располагаются в вершинах выпуклого четырехугольника. Следовательно, A_k и A_l — соседние вершины многоугольника W, например $l = k+1$. Но тогда $A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{n+1}, A_{k+1}, \ldots, A_n$ — последовательные вершины многоугольника W_1, составленного из многоугольника W и треугольника T.

Докажем, что многоугольник W_1 выпуклый, то есть каждый отрезок, концы которого находятся в W, целиком лежит в этом многоугольнике.

Пусть точки M и N принадлежат многоугольнику W_1. Может представиться один из двух случаев.

а) Обе точки M и N лежат либо в многоугольнике W, либо в треугольнике T. Тогда и весь отрезок MN содержится либо в многоугольнике W, либо в треугольнике T и, следовательно, лежит в многоугольнике W_1.

б) Одна из точек, например точка M, находится в многоугольнике W вне треугольника T, а другая (точка N) — в треугольнике T вне многоугольника W. Отрезок MN лежит в выпуклом угле α и соединяет точки, расположенные в двух частях, на которые отрезок $A_k A_{k+1}$ делит замкнутую область α (угол α вместе с образующими его границы лучами). Следовательно, отрезок MN должен иметь с отрезком $A_k A_{k+1}$ некоторую общую точку P.

Отрезок MP содержится в многоугольнике W, а отрезок PN — в треугольнике T. Таким образом, каждый из этих отрезков, а значит и их сумма MN, содержится в многоугольнике W_1. Тем самым утверждение задачи полностью доказано.

Примечание. Следующая теорема позволяет весьма просто доказать утверждение задачи:

для любого конечного множества Z точек плоскости, состоящего из $n \geqslant 3$ не лежащих на одной прямой точек, существует такой выпуклый многоугольник W, что:

1) *множество Z содержится в многоугольчике W;*

2) *любая вершина многоугольника W совпадает с одной из точек множества Z.*

Такой многоугольник W называется *выпуклой оболочкой* множества Z [1].

Пусть Z — множество, состоящее из $n \geqslant 4$ точек плоскости, любые четыре из которых расположены в вершинах выпуклого четырехугольника, и многоугольник W — выпуклая оболочка множества Z. Тогда любая точка множества Z совпадает с одной из вершин многоугольника W. В этом нетрудно убедиться, если учесть, что: 1) ни одна точка множества Z не лежит на периметре многоугольника W между двумя его вершинами, поскольку никакие три точки множества Z не лежат на одной прямой; 2) ни одна точка множества Z не лежит внутри многоугольника W, поскольку в противном случае она находилась бы в одном из треугольников, на которые многоугольник W можно разделить диагоналями, проведенными из одной вершины, а это противоречило бы исходному предположению (о том, что любые 4 точки множества Z расположены в вершинах выпуклого четырехугольника).

Таким образом, выпуклая оболочка W является тем многоугольником, который требовалось построить.

114. I. Предположим, что $k \leqslant \frac{n}{2}$. Выберем из множества Z заданных точек подмножество Z_1, состоящее из $\left[\frac{n}{2}\right]$ точек, а остальные точки включим в подмножество Z_2, которое содержит $\left[\frac{n}{2}\right]$ точек при четном n и $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ точек при нечетном n. Поскольку k — целое число, то из условия $k \leqslant \frac{n}{2}$ следует, что $k \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$. Таким образом, каждое из множеств Z_1 и Z_2 содержит по крайней мере k точек.

Соединим отрезками прямых каждую точку множества Z_1 с каждой точкой множества Z_2. Каждая точка множества Z окажется соединенной по крайней мере с k точками того же множества. Никакие три из проведенных отрезков не являются сторонами одного и того же треугольника, поскольку если бы такой треугольник существовал, то две его вершины, то есть концы одного из отрезков, лежали бы в одном из множеств Z_1 и Z_2, что невозможно, так как таких отрезков мы не проводили.

[1] См. также примечание к решению задачи 102.

II. Предположим, что $k > \frac{n}{2}$ и каждая из множества заданных точек соединена k отрезками с k другими точками того же множества. Пусть AB — один из проведенных отрезков.

Из концов A и B отрезка AB помимо самого отрезка выходят по $k-1$ других отрезков, то есть всего $2k-2$ отрезков. Их концы принадлежат множеству остальных $n-2$ точек. Но если $k > \frac{n}{2}$, то $2k-2 > n-2$. Следовательно, среди этих $2k-2$ отрезков существуют два отрезка с общим концом C. Таким образом, множество проведенных отрезков содержит стороны AB, AC и BC треугольника ABC.

Примечание. Аналогичным образом можно доказать и более общее утверждение. *Пусть заданы множество Z, содержащее $n > 3$ точек, из которых никакие 3 не лежат на одной прямой, натуральное число p, удовлетворяющее неравенству $3 \leqslant p < n$, и натуральное число $k < n$. Тогда*

1) *если $k \leqslant \frac{p-2}{p-1} n$, то каждую точку множества Z можно так соединить отрезками прямых по крайней мере с k другими точками того же множества, что в любом подмножестве множества Z, содержащем p точек, найдутся две точки, не соединенные отрезком;*

2) *если $k > \frac{p-2}{p-1} n$ и каждая точка множества Z соединена отрезками прямых с k другими точками того же множества, то существует такое подмножество множества Z, содержащее p точек, в котором любые две точки соединены отрезком.*

115. Утверждение задачи достаточно доказать для $a \geqslant 0$, поскольку если $a < 0$, то, изменив знаки в уравнениях (1) и (2), мы получим $a > 0$.

I. Утверждение задачи доказывается особенно просто при $a = 0$.

Если $b \neq 0$, то уравнение (2) имеет корень

$$x_0 = -\frac{c}{b},$$

а поскольку из условия (1) следует, что $\frac{c}{b} = -\frac{m}{m+1}$ при $a = 0$, то $x_0 = \frac{m}{m+1}$ и поэтому $0 < x_0 < 1$.

Если же $b = 0$, то из уравнения (1) получаем, что и $c = 0$. В этом случае уравнению (2) удовлетворяет любой x.

II. $a > 0$. Пусть $f(x)$ — значение, принимаемое в точке x левой частью уравнения (2). Докажем прежде всего, что из условия (1) следует неравенство

$$f\left(\frac{m}{m+1}\right) < 0. \quad (3)$$

Подставляя в $f(x)$ значение $x = \frac{m}{m+1}$, находим

$$f\left(\frac{m}{m+1}\right) = a\left(\frac{m}{m+1}\right)^2 + b\left(\frac{m}{m+1}\right) + c = \\ = m\left(\frac{am}{(m+1)^2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m}\right).$$

Отсюда и из условия (1) получаем

$$f\left(\frac{m}{m+1}\right) = m\left[\frac{am}{(m+1)^2} - \frac{a}{m+2}\right] = \\ = am\frac{m(m+2)-(m+1)^2}{(m+1)^2(m+2)} = \frac{-am}{(m+1)^2(m+2)} < 0.$$

Рассмотрим далее отдельно 2 случая.

а) Если $c > 0$, то

$$f(0) = c > 0. \quad (4)$$

Из неравенств (3) и (4) следует, что в случае (а) уравнение $f(x) = 0$ имеет корень в интервале $\left[0, \frac{m}{m+1}\right]$, содержащемся в интервале $[0, 1]$.

б) Если $c \leqslant 0$, то

$$f(1) = a + b + c = (m+1)\left(\frac{a}{m+1} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m+1}\right).$$

Используя условие (1), получаем

$$f(1) = (m+1)\left[\left(\frac{a}{m+1} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m+1}\right) - \right. \\ \left. - \left(\frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m}\right)\right] = \\ = (m+1)\left[\frac{a}{m+1} - \frac{a}{m+2} + \frac{c}{m+1} - \frac{c}{m}\right] = \\ = (m+1)\left[\frac{a}{(m+1)(m+2)} - \frac{c}{m(m+1)}\right].$$

По предположению (б) $c \leqslant 0$, поэтому

$$f(1) > 0. \quad (5)$$

Из неравенств (3) и (5) следует, что в случае (6) уравнение $f(x) = 0$ имеет корень, заключенный в интервале $\left[\frac{m}{m+1}, 1\right]$, который содержится в интервале $[0, 1]$, что и требовалось доказать.

Примечание. В приведенном выше решении использована следующая теорема:

если функция $f(x)$ переменной x непрерывна в некотором замкнутом интервале и на концах его принимает значения различных знаков, то в этом интервале существует такое значение x, при котором $f(x) = 0$.

Эту теорему мы применили к квадратичной функции, которая, как известно, непрерывна при любом x.

Заметим, что при рассмотрении квадратичной функции отнюдь не обязательно ссылаться на общую теорему о непрерывных функциях. Существует вполне элементарное доказательство нужного нам утверждения. Известно, что при $a \neq 0$

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

Это означает, что при $b^2 - 4ac \leqslant 0$ знак функции $f(x)$ при любом x совпадает со знаком коэффициента a при старшем члене. Следовательно, если найдутся такие числа p и q, что $f(p) > 0$ и $f(q) < 0$, то $b^2 - 4ac > 0$. Но при $b^2 - 4ac > 0$ уравнение $f(x) = 0$ имеет два вещественных корня x_1, x_2 и $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. Таким образом,

$$a(p - x_1)(p - x_2) > 0, \quad a(q - x_1)(q - x_2) < 0.$$

Из этих равенств нетрудно вывести, что одно из чисел x_1, x_2 заключено между числами p и q.

116. Прежде всего заметим, что при $a < b$

$$|x - a| + |x - b| = \begin{cases} a + b - 2x & \text{при} \quad x \leqslant a, \\ -a + b & \text{при} \quad a \leqslant x \leqslant b, \\ 2x - a - b & \text{при} \quad x \geqslant b. \end{cases}$$

Следовательно, сумма $|x - a| + |x - b|$ достигает своего наименьшего значения $-a + b$ в каждой точке интервала $a \leqslant x \leqslant b$. Это замечание сразу же приводит к решению задачи.

Не ограничивая общности, можно предположить, что числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ образуют возрастающую последовательность, то есть что

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_n.$$

При $n = 2m$ (m — целое число) правую часть выражения

$$y = |x - a_1| + |x - a_2| + \dots + |x - a_n| \qquad (1)$$

можно разбить на m пар, объединяя первый член с последним, второй — с предпоследним и так далее. Выражение (1) при этом преобразуется к виду

$$y = (|x - a_1| + |x - a_n|) + (|x - a_2| + |x - a_{n-1}|) + \dots$$
$$\dots + (|x - a_m| + |x - a_{m-1}|). \qquad (1а)$$

Сумма $y_i = |x - a_i| + |x - a_{n+1-i}|$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ принимает наименьшее значение в интервале $a_i \leqslant x \leqslant a_{n+1-i}$, в котором она постоянна. Каждый из интервалов $a_i \leqslant x \leqslant a_{n+1-i}$ содержит следующий, а все интервалы имеют общую часть — интервал $a_m \leqslant x \leqslant a_{m+1}$. В каждой точке этого интервала любая из сумм y_i достигает своего наименьшего значения. Следовательно, y также принимает свое наименьшее значение, которое мы получим, подставив в (1а) $x = a_m$ или $x = a_{m+1}$. Это значение равно

$$-a_1 - a_2 - \dots - a_m + a_{m+1} + \dots + a_n.$$

При $n = 2m + 1$ (m — целое число) правую часть выражения (1) можно преобразовать к виду

$$y = (|x - a_1| + |x - a_n|) + \dots$$
$$\dots + (|x - a_m| + |x - a_{m+2}|) + |x - a_{m+1}|. \qquad (1б)$$

Как и в случае четного n, нетрудно проверить, что при $x = a_{m+1}$ каждая из сумм $y_i = |x - a_i| + |x - a_{n+1-i}|$ принимает свое наименьшее значение. Слагаемое $|x - a_{m+1}|$ также достигает при $x = a_{m+1}$ наименьшего значения, так как обращается в нуль. Следовательно, y также принимает наименьшее значение, равное в силу соотношения (1б) числу

$$-a_1 - a_2 - \dots - a_m + a_{m+2} + a_{m+3} + \dots + a_n.$$

117. По условию (2)

$$\frac{a}{b} - \frac{p}{q} = \frac{aq - bp}{bq} > 0,$$
$$\frac{r}{s} - \frac{a}{b} = \frac{br - as}{bs} > 0.$$

Следовательно, $aq - bp > 0$, $br - as > 0$, а поскольку в левых частях этих неравенств стоят целые числа, то

$$aq - bp \geqslant 1, \quad br - as \geqslant 1.$$

Умножая обе части первого неравенства на s, а второго на q и складывая отдельно правые и левые части, получаем

$$b(rq - ps) \geqslant q + s.$$

Выражение, стоящее в скобках, по условию (1) равно 1, поэтому

$$b \geqslant q + s,$$

что и требовалось доказать.

118. Доказательство утверждения задачи основано на двух леммах.

а) *Если оси OX и OY прямоугольной системы координат служат осями симметрии фигуры F, то ось OZ также является осью симметрии этой фигуры* (рис. 87).

Пусть $A = (x, y, z)$ — точка фигуры F. Координаты точки B, симметричной точке A относительно оси OX, мы получим, изменив знаки у второй и третьей координат точки A и сохранив ее первую координату, то есть $B = (x, -y, -z)$. Аналогично точка $C = (-x, -y, z)$ симметрична точке B относительно оси OY. По предположению леммы точки B и C принадлежат фигуре F. Но точка C симметрична точке A относительно оси OZ. Следовательно, OZ — ось симметрии фигуры F.

б) *Если прямые s и t служат осями симметрии фигуры F, то прямая u, симметричная прямой t относительно прямой s, также является осью симметрии фигуры F.*

Пусть A_1 — произвольно выбранная точка фигуры F, A_2 — точка, симметричная точке A_1 относительно прямой s, A_3 — точка, симметричная точке A_2 относительно прямой t, и A_4 — точка, симметричная точке A_3 относительно прямой s. Из предположения леммы следует, что точка A_2, а значит, и точки A_3 и A_4 принадлежат фигуре F. Точки A_2, A_3 и прямая t при отражении относительно прямой s переходят в точки A_1, A_4 и прямую u. Поскольку точки A_2 и A_3 симметричны относительно прямой t, то

их образы (точки A_1 и A_4) симметричны относительно образа прямой t, то есть относительно прямой u. Следовательно, прямая u — ось симметрии фигуры F.

Леммы (а) и (б) позволяют доказать утверждение задачи следующим образом.

Пусть попарно различные прямые $s_1, s_2, \ldots, s_n$ суть все оси симметрии фигуры F. Требуется доказать, что

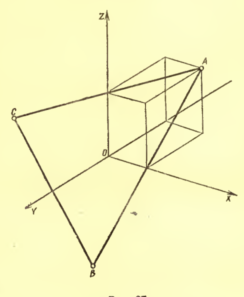


Рис. 87.

число n нечетное (поэтому в дальнейшем можно предполагать, что $n > 1$). Каждой оси симметрии s_i ($i \geqslant 2$) поставим в соответствие ось s_j ($j \geqslant 2$, $j \neq i$), выбрав ее следующим образом. Если ось s_i перпендикулярна оси s_1 и пересекает её в некоторой точке O, то оси симметрии s_i поставим в соответствие ось симметрии фигуры F, перпендикулярную осям s_1 и s_i в точке O. Известно, что такая ось существует — лемма (а). Если же ось s_i не перпендикулярна оси s_1 или не пересекает ее, то оси s_i поставим в соответствие ось s_j, симметричную оси s_i относительно s_1. Такая ось существует — лемма (б). В обоих случаях прямая s_j отличается от s_1 и s_i и прямой s_j

поставлена в соответствие прямая s_i. Таким образом, множество $n-1$ прямых $s_2, \ldots, s_n$ оказалось разбитым на пары, не имеющие общих элементов. Следовательно, число n нечетное.

Примечание. Лемма (б) позволяет доказать следующую теорему:

если множество осей симметрии фигуры F конечно (но не пусто), то все оси симметрии имеют общую точку.

Доказательство. Если какая-то фигура обладает осями симметрии s_1 и s_2, то по лемме (б) осями симметрии той же фигуры служат прямые $s_3, s_4, \ldots$, где s_i $(i = 3, 4, \ldots)$ — прямые, симметричные прямой s_{i-1} относительно прямой s_{i-2}.

Если прямые s_1 и s_2 скрещивающиеся или параллельные (но не совпадают), то все прямые s_i различны, поскольку расстояние между прямыми s_i и s_1 с увеличением i возрастает. Таким образом, в этом случае фигура имеет бесконечно много осей симметрии. Следовательно, если множество осей симметрии фигуры конечно, то любые две оси симметрии этой фигуры пересекаются.

Это означает, что если не все оси симметрии фигуры F расположены в одной плоскости, то они все имеют общую точку. Действительно, если оси симметрии s_1 и s_2 фигуры F пересекаются в точке M и лежат в плоскости α, то любая ось симметрии, не лежащая в плоскости α, например ось s_3, проходит через точку M (поскольку пересекается с осями s_1 и s_2), в силу чего любая ось симметрии фигуры F, лежащая в плоскости α, также проходит через точку M (поскольку пересекается с осью s_3).

Остается рассмотреть случай, когда все оси симметрии $s_1, s_2, \ldots, s_n$ $(n > 2)$ фигуры F расположены в одной плоскости. Предположим, что прямые s_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ не пересекаются в одной точке. Каждая из прямых s_i пересекает любую другую прямую, поэтому множество Z точек пересечения прямых s_i конечно и содержит точки, не лежащие на одной прямой (поскольку они расположены в вершинах треугольников). По лемме (б) каждая из прямых s_i служит осью симметрии фигуры $s_1, s_2, \ldots, s_n$ (множества всех осей симметрии фигуры F) и, таким образом, является также осью симметрии множества Z. Следовательно, каждая из прямых s_i — ось симметрии выпуклой оболочки W множества Z, поскольку при отражении относительно прямой образ выпуклой оболочки множества совпадает с выпуклой оболочкой образа преобразуемого множества. Но тогда через каждую вершину многоугольника W проходили бы по крайней мере 2 его оси симметрии, или любые две смежные стороны многоугольника были бы симметричны относительно двух различных прямых, что невозможно.

Итак, утверждение доказано. Пользуясь им, можно внести незначительное исправление в заключительную часть приведенного выше решения — там, где говорится: «Если же ось s_i не перпендикулярна оси s_1 или не пересекает ее...» — следует отбросить слова «или не пересекает ее», поскольку такой случай не может представиться.

119. По известной теореме сумма внешних углов многоугольника равна 360°. Следовательно, в восьмиугольнике $A_1A_2 \ldots A_8$ с равными внутренними углами каждый внешний угол равен 45°.

Рассмотрим три последовательные стороны восьмиугольника, например A_1A_2, A_2A_3 и A_3A_4. Продолжения сторон A_1A_2 и A_4A_3 образуют с лучами A_2A_3 и A_3A_2 углы, равные 45°, и поэтому пересекаются в некоторой точке N под прямым углом (рис. 88).

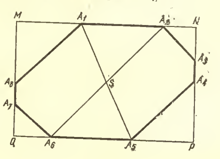


Рис. 88.

Аналогичное утверждение справедливо и относительно любых других троек последовательных сторон восьмиугольника. Это означает, что противоположные стороны A_1A_2 и A_5A_6 восьмиугольника лежат на противоположных сторонах MN и PQ прямоугольника $MNPQ$, где M, P, Q — точки пересечения прямых A_1A_2 и A_7A_8, A_3A_4 и A_5A_6, A_5A_6 и A_7A_8.

Поскольку по условиям задачи длины сторон восьмиугольника рациональны, то отсюда следует, что $A_1A_2 = A_5A_6$. Докажем это утверждение.

Введем для краткости обозначения

$$A_iA_{i+1} = a_i \, (i = 1, 2, \ldots, 7), \quad A_8A_1 = a_8.$$

Вычислим длину сторон MN и PQ прямоугольника.

$$MN = MA_1 + A_1A_2 + A_2N = a_8 \cos 45° + a_1 + a_2 \cos 45°,$$
$$PQ = PA_5 + A_5A_6 + A_6Q = a_4 \cos 45° + a_5 + a_6 \cos 45°.$$

Так как $MN = PQ$, то

$$a_8 \cos 45° + a_1 + a_2 \cos 45° = a_4 \cos 45° + a_5 + a_6 \cos 45°,$$

откуда

$$a_1 - a_5 = (a_4 + a_6 - a_8 - a_2)\cos 45°.$$

Числа $a_1 - a_5$ и $a_4 + a_6 - a_2 - a_8$ рациональны, а число $\cos 45° = \sqrt{2}/2$ иррационально. Следовательно, полученное равенство может выполняться лишь в том случае, если его правая и левая части равны нулю. Но тогда $a_1 = a_5$, то есть

$$A_1A_2 = A_5A_6,$$

что и требовалось доказать.

Итак, две стороны четырехугольника $A_1A_2A_5A_6$ равны и параллельны. Следовательно, четырехугольник $A_1A_2A_5A_6$ — параллелограмм, и его диагонали A_1A_5 и A_2A_6, пересекаясь, делятся пополам в точке S.

Аналогичным образом можно доказать, что четырехугольники $A_2A_3A_6A_7$ и $A_3A_4A_7A_8$ также представляют собой параллелограммы, в силу чего середина S диагонали A_2A_6 совпадает с серединами диагоналей A_3A_7 и A_4A_8.

Таким образом, восьмиугольник, о котором говорится в задаче, обладает центром симметрии S, что и требовалось доказать.

120. Многогранник, имеющий n ребер, существует в том и только в том случае, если $n \geqslant 6$ и $n \neq 7$.

Доказательство. а) Примером многогранника, имеющего $n = 2m$ $(m \geqslant 3)$ ребер, служит пирамида, в основании которой лежит многоугольник с m сторонами.

б) Пример многогранника с $n = 2m + 1$ $(m \geqslant 4)$ ребрами можно построить, взяв за исходный многогранник пирамиду с $2(m - 1)$ ребрами.

Через середины M, N, P трех ребер пирамиды, сходящихся в одной из вершин S основания пирамиды, проведем плоскость. Если отбросить тело $SMNP$, отсеченное плоскостью MNP, то оставшаяся часть пирамиды представляет собой многогранник, у которого число ребер на 3 больше, чем у исходной пирамиды, то есть равно $2m - 2 + 3 = 2m + 1$. При этом m может быть любым числом, удовлетворяющим неравенству $m - 1 \geqslant 3$, то есть $m \geqslant 4$.

в) Многогранника с семью ребрами не существует. Доказать это можно следующим образом. Если какая-

нибудь из граней многогранника имеет форму не треугольника, а многоугольника с числом сторон больше или равным 4, то число ребер такого многогранника не меньше восьми, поскольку из каждой вершины нетреугольной грани помимо двух ее сторон выходит по крайней мере еще одно ребро, и все ребра, выходящие из вершин грани, различны.

Если же все грани многогранника имеют форму треугольников и число их равно s, то число ребер равно $k = \frac{3s}{2}$. Следовательно, число k делится на 3, в силу чего $k \neq 7$.

г) Многогранника с числом ребер меньше шести не существует, поскольку каждый многогранник имеет по крайней мере 4 вершины, а из каждой вершины выходят не меньше трех ребер. Следовательно, число ребер у любого многогранника больше или равно $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$.

Утверждение задачи доказано.

121. Докажем сначала лемму.

Лемма. *Точка окружности K, наиболее удаленная от хорды PQ, лежит на прямой, проходящей через середину хорды перпендикулярно к ней.*

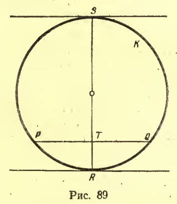


Рис. 89

Доказательство. Пусть RS — диаметр, перпендикулярный хорде PQ, и T — точка пересечения PQ и RS (рис. 89). Тогда центр окружности лежит на RS и прямые, перпендикулярные отрезку RS и проходящие через

точки R и S, совпадают с касательными к окружности K. Эти касательные параллельны хорде PQ, а окружность K заключена между ними. Следовательно, расстояние от любой точки окружности K до хорды PQ не превышает длину наибольшего из отрезков RT и ST. Лемма доказана.

Теперь приступим к решению задачи. Сумма площадей треугольников CP_1P_2, CP_2P_3, CP_3P_4, ..., $CP_{n-1}P_n$ равна сумме площадей многоугольника $P_1P_2 \ldots P_n$ и треугольника CP_1P_n (рис. 90). Площадь многоугольника

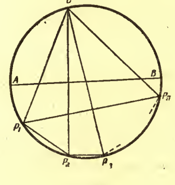


Рис. 90.

$P_1P_2 \ldots P_n$ не зависит от выбора точки C. Треугольник CP_1P_n имеет наибольшую площадь, когда точка C находится на наибольшем расстоянии от прямой P_1P_n. Следовательно, по доказанной лемме точку C следует выбрать так, чтобы она совпадала с точкой пересечения перпендикуляра, восставленного из середины хорды P_1P_n, с полуокружностью, не содержащей точек P_1, P_2, ..., P_n.

122. Поскольку члены последовательности $a_1, a_2, \ldots$ — различные натуральные числа, а множество натуральных чисел, каждое из которых меньше a_1, конечно, то все члены этой последовательности с достаточно большими номерами больше a_1, то есть

$$a_n > a_1 \quad \text{при} \quad n > n_1. \qquad (1)$$

Аналогичным образом можно доказать, что существуют такие числа n_2 и n_3, для которых

$$b_n > b_1 \quad \text{при} \quad n > n_2, \tag{2}$$

$$c_n > c_1 \quad \text{при} \quad n > n_3. \tag{3}$$

Следовательно, если n — натуральное число, большее любого из чисел n_1, n_2, n_3, то для него выполняются неравенства (1), (2) и (3).

Таким образом, для решения задачи достаточно выбрать $k = 1$, $l = n$.

123. Из выражения

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \tag{1}$$

для биномиального коэффициента получаем

$$n! = \binom{n}{k} k!\,(n-k)! \tag{2}$$

Поскольку $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-k) \cdot (n-k+1) \ldots \ldots (n-1) \cdot n = (n-k)!\,(n-k+1) \ldots (n-1) \cdot n$, то, разделив обе части равенства (2) на $(n-k)!$, преобразуем его к виду

$$n(n-1) \ldots (n-k+1) = \binom{n}{k} k! \tag{3}$$

Если n — простое число и $1 \leqslant k \leqslant n-1$, то ни одно из чисел $1, 2, \ldots, k$ не делится на n и, таким образом, $k!$ также не делится на n, а поскольку левая часть равенства (3) делится на n, то число $\binom{n}{k}$ делится на n.

Наоборот, если $\binom{n}{k}$ делится на n, то есть если $\binom{n}{k} = ns$, где s — некоторое натуральное число, то из соотношения (3) следует, что

$$(n-1)(n-2) \ldots [n-(k-1)] = s \cdot k! \tag{4}$$

Если n — составное число и p — один из его простых делителей, то числа $1, 2, \ldots, p-1$ не делятся на p и поэтому числа $n-1, n-2, \ldots, n-(p-1)$ также не делятся на p. Таким образом, если в равенстве (4) $k = p$, то левая часть равенства не делится на p, а правая, равная $s \cdot p!$, заведомо делится на p. Полученное противоречие доказывает, что если p — простой делитель

числа n и $p < n$, то биномиальный коэффициент $\binom{n}{p}$ не делится на n.

124. Пусть заданные взаимно перпендикулярные прямые служат осями прямоугольной системы координат, а координаты вершин i-го прямоугольника P_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) равны (x_i, y_i), (x_i, y'_i), (x'_i, y'_i), (x'_i, y_i),

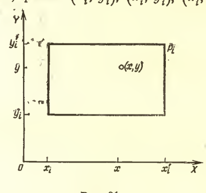


Рис. 91.

где $x_i < x'_i$, $y_i < y'_i$ (рис. 91). Точка (x, y) принадлежит прямоугольнику P_i в том и только в том случае, если

$$x_i \leqslant x \leqslant x'_i, \quad y_i \leqslant y \leqslant y'_i.$$

По условиям задачи любые два прямоугольника P_i и P_j имеют общую точку. Следовательно, для любой пары чисел i, j существуют такие x и y, что

$$x_i \leqslant x \leqslant x'_i, \quad x_j \leqslant x \leqslant x'_j$$

и

$$y_i \leqslant y \leqslant y'_i, \quad y_j \leqslant y \leqslant y'_j.$$

Отсюда мы заключаем, что при $i, j = 1, 2, \ldots, n$

$$x_i \leqslant x'_j, \quad y_i \leqslant y'_j. \tag{1}$$

Пусть a — наибольшее из чисел x_i, b — наибольшее из y_i. Из определения чисел a и b следует, что они удовлетворяют неравенствам

$$x_j \leqslant a, \quad y_j \leqslant b \quad \text{при} \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

а из неравенств (1) — что a и b удовлетворяют также неравенствам

$$a \leqslant x_j', \quad b \leqslant y_j' \quad \text{при} \quad j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (3)$$

Неравенства (2) и (3) означают, что точка (a, b) принадлежит всем прямоугольникам P_i.

Примечание 1. В решении задачи по существу никак не использовано то, что число прямоугольников P_i конечно. Если бы было задано бесконечное семейство прямоугольников с аналогичными свойствами, то утверждение задачи осталось бы в силе и доказательство его было бы аналогично приведенному выше. Единственное отличие состояло бы в том, что числа a и b следовало бы определить как верхние грани числовых множеств x_j и y_j.

Примечание 2. Аналогичное утверждение остается в силе и в том случае, если вместо прямоугольников рассматривать произвольные выпуклые фигуры. Справедлива следующая теорема.

Теорема Хелли[1]. *Если на плоскости задано непустое семейство выпуклых множеств, обладающее тем свойством, что любые три множества из этого семейства имеют общую точку, то существует точка, принадлежащая всем множествам данного семейства.*

Доказательство этой теоремы можно найти в книге И. М. Яглома и В. Г. Болтянского «Выпуклые фигуры» (М. — Л., Гостехтеоретиздат, 1951, стр. 30 и далее).

125. I решение. Первое подмножество из двух элементов можно выбрать $\binom{12}{2}$ способами. Второе множество из двух элементов, отличное от первого, мы выбираем из 10 оставшихся элементов исходного множества. Сделать это можно $\binom{10}{2}$ способами. Аналогичным образом, третье множество из двух элементов можно выбрать $\binom{8}{2}$ способами и так далее. Следовательно, 6 подмножеств, каждое из которых содержит по 2 элемента, можно выбрать

$$\binom{12}{2}\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2} = \frac{12 \cdot 11}{2} \cdot \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2 \cdot 1}{2} = \frac{12!}{2^6}$$

способами. Однако любое разбиение исходного множества на 6 различных подмножеств, каждое из которых содер-

[1] См. также примечание к решению задачи 58. — *Прим. перев.*

жит по 2 элемента, встретится при этом 6! раз, поскольку разбиение не зависит от того, в какой последовательности мы выбираем 6 подмножеств.

Итак, число различных способов разбиения исходного множества, содержащего 12 элементов, на подмножества из 2 элементов равно

$$\frac{12!}{6!\,2^6}=\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{2^6}=11\cdot 9\cdot 7\cdot 5\cdot 3.$$

II решение. Пусть a_1 — один из элементов исходного множества, содержащего 12 элементов. Подмножество из 2 элементов, содержащее a_1, можно выбрать 11 способами, присоединяя к a_1 один из остальных 11 элементов.

Пусть a_2 — один из элементов множества из 10 элементов, которые остались после того, как мы извлекли подмножество из двух элементов, содержащее a_1 из исходного множества. Подмножество из 2 элементов, содержащее a_2, можно выбрать 9 способами, присоединяя к a_2 один из остальных 9 элементов.

Продолжая разбиение, мы получаем, что число способов, которыми из исходного множества можно составить 6 подмножеств из 2 элементов, равно $11\cdot 9\cdot 7\cdot 5\cdot 3$.

126. Предположим, что квадратный трехчлен $f(x)=$ $=ax^2+bx+c$ удовлетворяет неравенству

$$|f(x)|\leqslant 1 \qquad (1)$$

при $0\leqslant x\leqslant 1$. Тогда, в частности, выполняются неравенства $|f(0)|\leqslant 1$, $\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|\leqslant 1$ и $|f(1)|\leqslant 1$. Поскольку $f(0)=c$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+c$, $f(1)=a+b+c$, и $f'(0)=$ $=b=4\left(\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+c\right)-(a+b+c)-3c$, то

$$|f'(0)|\leqslant 4\left|\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+c\right|+|a+b+c|+3|c|=$$

$$=4\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|+|f(1)|+3|f(0)|\leqslant 4+1+3=8.$$

Следовательно, $A\leqslant 8$.

С другой стороны, квадратный трехчлен $f(x)=$ $=-8x^2+8x-1=-2(2x-1)^2+1$ удовлетворяет неравенству (1). Действительно, при $0\leqslant x\leqslant 1$ выпол-

няется неравенство $-1 \leqslant 2x-1 \leqslant 1$, поэтому $0 \leqslant (2x-1)^2 \leqslant 1$. Следовательно, $-2 \leqslant -2(2x-1)^2 \leqslant 0$ и $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$. Кроме того, $f'(x) = -16x+8$, поэтому $f'(0) = 8$. Итак, $A \geqslant 8$.

Поскольку $A \geqslant 8$ и $A \leqslant 8$, то $A = 8$.

127. Очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда $\{a_n\}$ — последовательность всех натуральных чисел, десятичная запись, которых не содержит цифры 0.

Пусть b_n — число, получающееся из a_n при замене всех цифр, кроме первой, нулями. Ясно, что $b_n \leqslant a_n$, поэтому $1/a_n \leqslant 1/b_n$. Последовательность $\{a_n\}$ содержит 9 однозначных чисел, 9^2 двузначных и вообще 9^k k-значных чисел, поскольку каждая цифра может быть выбрана из девяти: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Среди 9^k k-значных чисел последовательности $\{a_n\}$ имеется 9^{k-1} чисел, начинающихся с цифры 1, 9^{k-1} чисел, начинающихся с цифры 2, и так далее. Следовательно, в последовательности $\{b_n\}$ k-значное число $c00\ldots0$, где c — любая из цифр, отличных от нуля, встречается 9^{k-1} раз.

Пусть B_k — множество таких номеров n, что b_n — k-значное число. Тогда

$$\sum_{n\in B_k}\frac{1}{a_n} \leqslant \sum_{n\in B_k}\frac{1}{b_n} = 9^{k-1}\sum_{c=1}^{9}\frac{1}{c00\ldots0} = 9^{k-1}\sum_{c=1}^{9}\frac{1}{c\cdot 10^{k-1}} = (0{,}9)^{k-1}\sum_{c=1}^{9}\frac{1}{c}.$$

Вычислим сумму в правой части последнего равенства:

$$s_9 = \sum_{c=1}^{9}\frac{1}{c} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{9} = 2{,}8289\ldots < 2{,}9.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{r}\sum_{n\in B_k}\frac{1}{a_n} < \sum_{k=1}^{r} s_9(0{,}9)^{k-1} = s_9\frac{1-(0{,}9)^r}{1-0{,}9} < s_9\frac{1}{1-0{,}9} = 10s_9.$$

Так как полученное неравенство выполняется для любого натурального числа r, то в пределе при $r\to\infty$

получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n \in B_k} \frac{1}{a_n} \leqslant 10 s_9 < 29, \quad \text{или} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} < 29.$$

128. Предположим, что биллиардный стол имеет форму треугольника ABC. Пусть шар отражается сначала от стороны AC, а потом от стороны AB. Докажем следующую лемму.

Лемма. *При отражении шара сначала от стороны AC, а затем от стороны AB треугольника ABC* (рис. 92), *направление движения шара изменяется на угол $2\angle BAC$.*

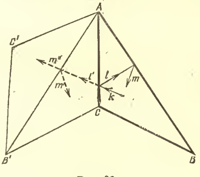


Рис. 92.

Доказательство. Пусть $AB'C$ — образ треугольника ABC при отражении относительно прямой AC, а $AB'C'$ — образ треугольника $AB'C$ при отражении относительно прямой AB'. Предположим, что векторы $\vec{k}$, $\vec{l}$, $\vec{m}$ задают направления движения биллиардного шара, $\vec{l'}$, $\vec{m'}$ — образы векторов $\vec{l}$, $\vec{m}$ при отражении относительно прямой AC, $\vec{m''}$ — образ вектора $\vec{m'}$ при отражении относительно прямой AB (рис. 92).

Из закона упругого отражения (угол падения равен углу отражения) следует, что векторы $\vec{k}$, $\vec{l'}$, $\vec{m''}$ параллельны. Поскольку произведение (последовательное выполнение) отражений относительно прямых AC и AB' сводится к повороту вокруг точки A на угол $2\angle BAC$, то

треугольник ABC при таком повороте переходит в треугольник $AB'C'$, а вектор $\vec{m}$ — в вектор $\vec{m}''$. Следовательно, угол между векторами $\vec{k}$ и $\vec{m}$ составляет $2\angle BAC$. Лемма доказана.

Теперь приступим к решению задачи. Поскольку отношения внутренних углов треугольника ABC рациональны, то существует такое число λ и натуральные числа r, s, t, что $\angle BAC = r\lambda$, $\angle ABC = s\lambda$, $\angle ACB = t\lambda$. Таким образом, $\lambda(r+s+t) = \pi$, или $\lambda = \pi/n$, где $n = r+s+t$.

По доказанной выше лемме после четного числа отражений направление движения биллиардного шара изменится на угол, равный четному кратному угла λ/n, то есть одному из чисел 2λ, 4λ, 6λ, ..., $2n\lambda = 2\pi$. Следовательно, после четного числа отражений от стенок биллиардный шар может двигаться в одном из n направлений. Аналогичным образом после нечетного числа отражений шар может двигаться в одном из n направлений. Следовательно, общее число направлений, по которым может двигаться биллиардный шар, не больше $2n$.

Примечание. Аналогичным образом можно доказать, что если в условиях задачи треугольник заменить произвольным многоугольником с рациональными отношениями внутренних углов, то число направлений, по которым может двигаться биллиардный шар по такому многоугольнику, конечно.

129. Предположим, что при некотором натуральном n ключи к n замкам можно распределить среди 11 членов комиссии с учетом всех условий задачи. Пусть A_i — множество замков, которые может открыть i-й член комиссии, где $i = 1, 2, \ldots, 11$, а A — множество всех замков. Из условий задачи следует, что

$$A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \ldots \cup A_{i_5} \neq A \qquad (1)$$

для любого подмножества $\{i_1, i_2, \ldots, i_5\}$ из 5 элементов множества $\{1, 2, \ldots, 11\}$ и

$$A_{j_1} \cup A_{j_2} \cup \ldots \cup A_{j_6} = A \qquad (2)$$

для любого подмножества $\{j_1, j_2, \ldots, j_6\}$ из 6 элементов множества $\{1, 2, \ldots, 11\}$.

Соотношение (1) означает, что множество $A - (A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_5})$ не пусто. Пусть $x_{i_1}, \ldots, x_{i_5}$ — один из его

элементов. Это — тот замок, который не может открыть группа членов комиссин с номерамн $i_1, \ldots, i_5$. Соотношение (2) означает, что $x_{i_1, \ldots, i_5} \in A_j$ при любом $j \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_5\}$.

Предположим, что для некоторых подмножеств из 5 элементов $\{i_1, \ldots, i_5\}$ и $\{k_1, k_2, \ldots, k_5\}$ множества $\{1, 2, \ldots, 11\}$ выполняется равенство $x_{i_1, \ldots, i_5} = x_{k_1, \ldots, k_5}$. Если эти подмножества не совпадают, то $i_t \notin \{k_1, k_2, \ldots, k_5\}$ при некотором $t \in \{1, 2, \ldots, 5\}$. Но тогда $x_{k_1, \ldots, k_5} \in A_{i_t}$, хотя, с другой стороны, $x_{i_1, \ldots, i_5} \notin A_{i_t}$. Полученное противоречне доказывает, что $\{i_1, i_2, \ldots, i_5\} = \{k_1, k_2, \ldots, k_5\}$.

Итак, мы доказалн, что разлнчным подмножествам из 5 элементов соответствуют разлнчные замкн. Следовательно, чнсло замков не меньше числа подмножеств, содержащих по 5 элементов нз 11, нли $n \geqslant \binom{11}{5} = 462$.

Докажем теперь, что еслн сейф снабжен $\binom{11}{5}$ замками, то ключи между членами комиссни можно распределнть так, чтобы удовлетворнть условиям задачн.

Для этого каждому нз $\binom{11}{5}$ замков мы поставнм во взаимно однозначное соответствие подмножество, содержащее 5 нз 11 элементов множества $\{1, 2, \ldots, 11\}$. Если замку соответствует подмножество $\{i_1, \ldots, i_5\}$, то ключ от него получают все члены комиссин с номерами, отлнчными от $i_1, \ldots, i_5$.

Докажем, что любые 5 членов комнссии не смогут открыть один нз замков, а следовательно, н сейф. Действительно, у членов комнссин с номерамн $i_1, \ldots, i_5$ нет ключа от замка, которому соответствует подмножество $\{i_1, \ldots, i_5\}$.

Докажем далее, что любые 6 членов комнсснн смогут открыть любой замок, а значнт, и сейф. Действительно, если члены комиссии имеют номера $j_1, \ldots, j_6$ и хотят открыть замок, которому соответствует подмножество $\{i_1, \ldots, i_5\}$, то по крайней мере одно нз чнсел $j_1, \ldots, j_6$ не принадлежит этому подмножеству, например $j_t \notin \{i_1, \ldots, i_5\}$. Следовательно, у члена комнссни с номером j_t найдется ключ от замка, которому соответствует подмножество $\{i_1, \ldots, i_5\}$.

Итак, наименьшее число замков, удовлетворяющее условиям задачи, равно $\binom{11}{5} = 462$.

130. Предположим, что натуральные числа x, y, z, n удовлетворяют уравнению

$$x^n + y^n = z^n. \qquad (1)$$

Не уменьшая общности, можно предположить, что $x \leqslant y$. Поскольку $z^n = x^n + y^n > y^n$, то $z > y$ и, следовательно, $z \geqslant y + 1$.

Возводя обе части этого неравенства в n-ю степень, получаем по формуле бинома Ньютона

$$z^n \geqslant (y+1)^n = y^n + \binom{n}{1} y^{n-1} + \ldots + 1 \geqslant y^n + ny^{n-1}. \qquad (2)$$

Сравнивая неравенство (2) с уравнением (1), приходим к неравенству $x^n \geqslant ny^{n-1}$, а поскольку $x \leqslant y$, то $x^n \geqslant nx^{n-1}$, или $x \geqslant n$. Итак, $\min(x, y) = x \geqslant n$.

131. Если $\sigma = (a_1, a_2, \ldots, a_{100})$ — перестановка натуральных чисел от 1 до 100, то пусть

$$A_\sigma = \max_{1 \leqslant n \leqslant 90} \sum_{k=1}^{10} a_{n+k}. \qquad (1)$$

Тогда сумма каких-то 10 последовательных членов перестановки σ равна A_σ и сумма любых 10 последовательных членов той же перестановки не больше A_σ. Итак, задача сводится к тому, чтобы найти число

$$A = \min_\sigma A_\sigma. \qquad (2)$$

Из определения (1) числа A_σ, в частности, следует, что

$$A_\sigma \geqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_{10},$$
$$A_\sigma \geqslant a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{20},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_\sigma \geqslant a_{91} + a_{92} + \ldots + a_{100}.$$

Складывая левые и правые части этих неравенств, получаем

$$10A_\sigma \geqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_{100} = 1 + 2 + \ldots + 100 = 5050.$$

Таким образом, для любой перестановки σ выполняется неравенство $A_\sigma \geqslant 505$, в силу чего (см. определение (2) числа A)

$$A \geqslant 505. \qquad (3)$$

Рассмотрим теперь следующую перестановку $\tau = (a_1, a_2, \ldots, a_{100})$ множества натуральных чисел от 1 до 100:

$$100, 1, 99, 2, 98, 3, 97, 4, \ldots, 51, 50.$$

Эту перестановку можно задать соотношениями

$$a_{2n+1} = 100 - n \quad \text{при} \quad 0 \leqslant n \leqslant 49,$$
$$a_{2n} = n \quad \text{при} \quad 1 \leqslant n \leqslant 50.$$

Докажем, что сумма любых 10 ее последовательных членов не больше 505.

Действительно, если первый из 10 рассматриваемых членов имеет четный номер $2k$, то

$$s = a_{2k} + a_{2k+1} + \ldots + a_{2k+9} = (a_{2k} + a_{2k+2} + \ldots + a_{2k+8}) + (a_{2k+1} + a_{2k+3} + \ldots + a_{2k+9}) = [k + (k+1) + \ldots + (k+4)] + [(100-k) + (100-(k+1)) + \ldots + (100-(k+4))] = 500.$$

Если же первый из рассматриваемых членов имеет нечетный номер $2k+1$, то

$$\bar{s} = a_{2k+1} + a_{2k+2} + \ldots + a_{2k+10} = (a_{2k} + a_{2k+1} + \ldots + a_{2k+9}) + a_{2k+10} - a_{2k} = s + (k+5) - k = s + 5 = 505.$$

Итак, мы доказали, что сумма любых 10 последовательных членов перестановки τ не больше 505 (и может равняться этому числу). Следовательно, $A_\tau = 505$ и поэтому из соотношения (2)

$$A \leqslant 505. \qquad (4)$$

Сравнивая неравенства (3) и (4), получаем

$$A = 505.$$

Примечание 1. Задачу можно обобщить следующим образом. Найти наибольшее число A, такое, что для любой перестановки натуральных чисел от 1 до четного числа $n = 2t$ сумма $m = 2r$ (где r — делитель числа t) последовательных членов перестановки не меньше A.

Незначительно изменив приведенное выше решение (заменив число 100 на $2t$, а 10 — на $2r$), можно доказать, что $A = (^1/_2)m(n+1)$.

Примечание 2. Если $m \leqslant n$ — произвольные натуральные числа, то в общем случае утверждение о том, что любая перестановка чисел от 1 до n содержит m последовательных членов, сумма которых не меньше $(^1/_2)m(n+1)$, не верно. Например, при $n = 6$, $m = 4$ перестановка 6, 4, 1, 2, 3, 5 не содержит четырех последовательных членов, сумма которых не меньше 14.

132. 1) Начнем с предварительного замечания. В равностороннем треугольнике со стороной, равной 1, множество, состоящее из середин P, Q двух боковых сторон, обладает тем свойством, что любая точка треугольника отстоит от одной из точек P, Q не больше чем на $^1/_2$. Действительно, если провести 2 круга с центрами

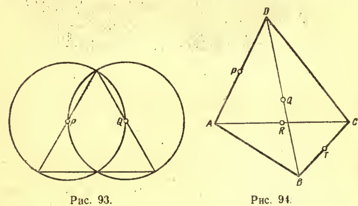


Рис. 93. Рис. 94.

в точках P, Q и радиусом $^1/_2$ (рис. 93), то, как нетрудно видеть, треугольник будет содержаться в объединении этих кругов.

Пусть P, Q, R, T — середины ребер AD, BD, AC, BC правильного тетраэдра $ABCD$ (рис. 94). Тогда каждой из граней тетраэдра $ABCD$ принадлежат две из точек P, Q, R, T, совпадающих с серединами двух ребер грани. Из предварительного замечания следует, что каждая

точка, принадлежащая любой грани тетраэдра, отстоит от одной из точек P, Q, R, T на расстояние не больше чем $1/2$.

2) Пусть на поверхности тетраэдра $ABCD$ существуют три такие точки P, Q, R, что расстояние от любой точки на поверхности тетраэдра до одной из них не больше чем $1/2$. Поскольку тетраэдр имеет 4 вершины, то по крайней мере 2 вершины отстоят от одной и той же точки P, Q или R не больше чем на $1/2$. Пусть, например, расстояние от вершин A и D до точки P не больше чем $1/2$. Поскольку расстояние между вершинами A и D равно 1, то точка P совпадает с серединой ребра AD.

Заметим, что любая точка, принадлежащая высоте DE грани BCD (за исключением вершины D), отстоит от точки P больше чем на $1/2$. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим развертку поверхности тетраэдра $ABCD$ (рис. 95). Заштрихованная область представляет собой

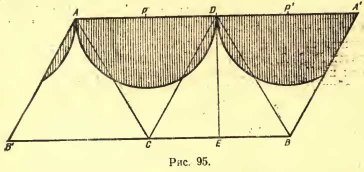


Рис. 95.

множество точек, расстояние от которых до точки P не превышает $1/2$. Высота DE имеет с заштрихованной областью лишь одну общую точку — вершину D.

Если бы расстояние от точки D до каждой из точек Q или R было больше $1/2$, то тем же свойством обладала бы и любая точка, принадлежащая некоторой окрестности точки D. В частности, точки отрезка DE, достаточно близкие к точке D, отстояли бы от любой из точек P, Q, R больше чем на $1/2$, что невозможно, так как противоречит исходному предположению. Следовательно, точка D удалена от одной из точек Q и R не больше чем на $1/2$. Аналогичным образом можно доказать, что точка A удалена от одной из точек Q и R не больше чем на $1/2$.

Поскольку расстояния от вершин B и C до точки P больше $^1/_2$, то расстояния от каждой вершины B и C до одной из точек Q и R не больше $^1/_2$.

Итак, мы доказали, что каждая вершина тетраэдра $ABCD$ отстоит от одной из точек Q и R не больше чем на $^1/_2$. При этом не существует трех вершин тетраэдра, расстояния которых до одной и той же из этих точек не больше $^1/_2$, поскольку радиус описанной окружности равностороннего треугольника со стороной, равной 1, больше $^1/_2$.

Следовательно, расстояния от каждой из точек Q и R каких-то двух вершин тетраэдра $ABCD$ не больше $^1/_2$ и точки Q и R совпадают с серединами каких-то двух ребер тетраэдра.

Итак, из исходного предположения следует, что каждая из точек P, Q, R совпадает с серединой одного из ребер тетраэдра $ABCD$. Выше, предположив, что точка P является серединой некоторого ребра, мы установили, что все четыре вершины тетраэдра A, B, C, D отстоят не больше чем на $^1/_2$ от одной из точек Q и R. Теперь мы можем провести то же рассуждение, начиная с любой из точек P, Q, R, и тем самым A, B, C, D отстоят не больше чем на $^1/_2$ от одной из точек любой пары, выбранной из тройки P, Q, R. Но среди точек P, Q, R обязательно есть пара, принадлежащая одной грани тетраэдра, и поэтому вершина тетраэдра, не лежащая в этой грани, отстоит от каждой из точек этой пары больше чем на $^1/_2$.

Полученное противоречие доказывает, что исходное предположение неверно. Следовательно, на поверхности S тетраэдра не существует трех точек, расстояния от которых до любой точки поверхности S не превосходят $^1/_2$.

133. Если $a_1 = a_2 = 0$, то многочлены u_1 и u_2 вырождаются в постоянные. Из соотношения

$$u_1(x)^n + u_2(x)^n = u_3(x)^n \tag{1}$$

следует, что многочлен $u_3(x)$ также вырождается в постоянную, то есть $a_3 = 0$. В этом случае достаточно положить $c_i = b_i$ $(i = 1, 2, 3)$, $A = 0$ и $B = 1$.

Если по крайней мере одно из чисел a_1, a_2 отлично от нуля, например $a_1 \neq 0$, то пусть $y = a_1x + b_1$. Тогда

$$u_j(x) = \frac{a_j}{a_1} y + \frac{b_j a_1 - a_j b_1}{a_1}$$

при $j=2, 3$ или $u_j(x)=A_jy+B_j$, где $A_j=\frac{a_j}{a_1}$ и $B_j=$ $=\frac{b_ja_1-a_jb_1}{a_1}$. Исходное равенство (1) преобразуется к виду

$$y^n+(A_2y+B_2)^n=(A_3y+B_3)^n, \tag{2}$$

где $y \in \mathbb{R}$. Приравнивая свободные члены и коэффициенты при y и y^n (по условиям задачи $n \geqslant 2$) в обоих частях равенства (2), получаем

$$B_2^n=B_3^n, \tag{3}$$

$$nA_2B_2^{n-1}=nA_3B_3^{n-1}, \tag{4}$$

$$1+A_2^n=A_3^n. \tag{5}$$

Если $B_2=0$, то из (3) следует, что и $B_3=0$, в силу чего $b_ja_1-a_jb_1=0$ при $j=2, 3$, или $b_j=\frac{a_j}{a_1}b_1$. В этом случае достаточно принять, что $c_1=1$, $c_j=\frac{a_j}{a_1}$ при $j=2, 3$, $A=a_1$, $B=b_1$.

Если $B_2 \neq 0$, то из того же соотношения (3) следует, что $B_3 \neq 0$. Разделив левую часть равенства (4) на левую часть равенства (3), а правую часть равенства (4) — на правую часть равенства (3), мы получим $\frac{A_2}{B_2}=\frac{A_3}{B_3}$. Возводя обе части этого равенства в n-ю степень и используя соотношение (3), приходим к равенству $A_2^n=A_3^n$, противоречащему соотношению (5). Таким образом, случай, когда $B_2 \neq 0$, представиться не может.

134. Напомним определение простой замкнутой ломаной.

Замкнутая ломаная, последовательные вершины которой обозначены $W_1, W_2, \ldots, W_n, W_{n+1}$, где $W_{n+1}=$ $=W_1$, называется простой, если при $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $1<j-i<n-1$ звенья ломаной W_iW_{i+1} и W_jW_{j+1} не имеют общих точек.

Пусть никакие три из n точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ на плоскости не лежат на одной прямой и $A_{n+1}=A_1$. Предположим, что замкнутая ломаная L с вершинами $A_1, A_2, \ldots$ $\ldots, A_n, A_{n+1}$, обозначенными в том порядке, в котором

они встречаются при обходе ломаной, — кратчайшая из ломаных, проходящих через заданные точки, и не простая. Если $i \neq j$, $1 \leqslant i$, $j \leqslant n$, то пусть $L(A_i, A_j)$ означает часть ломаной L с началом в точке A_i, содержащую вершины $A_{i+1}, A_{i+2}, \ldots, A_{j-1}, A_j$.

При $i = 1, 2, \ldots, n$

$$L(A_i, A_{i+1}) = A_i A_{i+1},$$

так как кратчайшая ломаная, соединяющая две точки, представляет собой отрезок прямой, соединяющей эти две точки.

Поскольку ломаная L не простая, то существуют такие числа i, j, что

$$1 \leqslant i, \ j \leqslant n, \quad 1 < j - i < n - 1 \tag{1}$$

и звенья A_iA_{i+1} и A_jA_{j+1} имеют общую точку P (рис. 96). Из неравенств (1) видно, что никакие две точки A_i, A_{i+1},

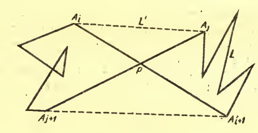


Рис. 96.

A_j, A_{j+1} не совпадают. Следовательно, точка P лежит внутри каждого из отрезков A_iA_{i+1}, A_jA_{j+1}, поскольку по условиям задачи никакие три из заданных точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ не лежат на одной прямой.

Поскольку в любом невырожденном треугольнике длина одной стороны меньше суммы двух других сторон, то

$$A_iA_j < A_iP + PA_j, \quad A_{i+1}A_{j+1} < A_{i+1}P + PA_{j+1},$$

откуда

$$A_iA_j + A_{i+1}A_{j+1} < A_iA_{i+1} + A_jA_{j+1}.$$

Это означает, что замкнутая ломаная L', составленная из ломаных $L(A_{j+1}, A_i)$, A_iA_j, $L(A_j, A_{i+1})$, $A_{i+1}A_{j+1}$, проходит через заданные точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и короче замкнутой ломаной L, составленной из ломаных $L(A_{j+1}, A_i)$, A_iA_{i+1}, $L(A_{i+1}, A_j)$, A_jA_{j+1}. Полученное противоречие доказывает, что кратчайшая замкнутая ломаная, проходящая через точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$, простая.

Примечание. Нетрудно доказать, что кратчайшая простая замкнутая ломаная, проходящая через точки $A_1, A_2, \ldots$ $\ldots, A_n$, существует. Действительно, если эта ломаная проходит последовательно через точки A_i и A_j, то часть ее, заключенная между вершинами A_i и A_j, не короче отрезка прямой A_iA_j (поскольку отрезок прямой короче любой из ломаных, соединяющих его концы). Итак, чтобы получить кратчайшую ломаную, проходящую через точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$, достаточно рассмотреть ломаную, составленную из отрезков A_iA_j. Число таких отрезков конечно. Следовательно, число составленных из них замкнутых ломаных также конечно, и среди этих ломаных существует ломаная наименьшей длины.

135. Рассмотрим многочлен $f_n(x) = \frac{1}{2}[(2x-1)^n + 1]$, где n — натуральное число. Все его коэффициенты — целые числа, так как все коэффициенты многочлена $(2x-1)^n + 1$ — четные числа.

При $x \in [0,1; 0,9]$ двучлен $2x-1$ удовлетворяет неравенствам $-0,8 \leqslant 2x-1 \leqslant 0,8$, поэтому

$$\left| f_n(x) - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} |2x-1|^n \leqslant \frac{1}{2}(0,8)^n.$$

Выясним, при каких натуральных значениях n выполняется неравенство $\frac{1}{2}(0,8)^n < 0,001$:

$$(0,8)^n < 0,002; \quad n \log 0,8 < \log 0,002;$$

$$n > \frac{\log 0,002}{\log 0,8} = 27,8.$$

Итак, условиям задачи удовлетворяет любой из многочленов $f_n(x)$ при $n \geqslant 28$.

136. Докажем сначала следующую лемму.

Лемма. *Пусть W — вершина, O — центр основания прямого кругового конуса и Q — точка, лежащая в плоскости основания. Угол между прямой WQ и образующей*

конуса WR достигает наибольшего значения, если $O \in QR$ (рис. 97).

Доказательство. Для любой точки R, лежащей на окружности, которая ограничивает основание конуса, по теореме косинусов справедливо равенство

$$QR^2 = WR^2 + WQ^2 - 2WR \cdot WQ \cos(\angle QWR).$$

Поскольку длины отрезков WR и WQ постоянны (не зависят от положения точки R на окружности), то угол QWR будет наибольшим, когда его косинус достигнет наименьшего значения, то есть длина отрезка QR будет наибольшей. Это произойдет, когда $O \in QR$. Лемма доказана.

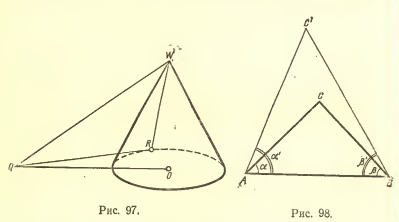


Рис. 97. Рис. 98.

Переходим к решению задачи. Пусть ABC' — треугольник из множества Z, содержащий центр O сферы K. Ясно, что такой треугольник в множестве Z существует. Пусть $\alpha' = \angle BAC'$, $\beta' = \angle ABC'$, и аналогично для любого треугольника ABC из множества Z пусть $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$.

Поскольку AC — прямая, касательная к сфере K, то она — образующая прямого кругового конуса с осью AO. Следовательно, по лемме $\alpha' \geqslant \alpha$ и аналогично $\beta' \geqslant \beta$. Совместив треугольники ABC' и ABC в одной плоскости (рис. 98), мы легко убедимся в том, что $\triangle ABC \subset \triangle ABC'$, причем оба треугольника ABC и ABC' имеют общее основание. Это означает, что площадь и периметр

треугольника $A'BC'$ не меньше площади и периметра треугольника ABC.

137. Предположим, что конечное множество A содержит n элементов. Методом математической индукции по n докажем, что существует такой упорядоченный набор подмножеств

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_m, \tag{1}$$

в котором любое подмножество множества A встречается только один раз. Кроме того, набор подмножеств (1) обладает следующим свойством:

при $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1$ одно из подмножеств $A_{i+1} \setminus A_i$ и $A_i \setminus A_{i+1}$ пусто, а другое содержит 1 элемент. (2)

При $n = 1$ множество A содержит 1 элемент, и набор подмножеств $A_1 = \varnothing$, $A_2 = A$ удовлетворяет условию (2).

Предположим, что при некотором натуральном n все подмножества любого множества, содержащего n элементов, можно расположить в таком порядке (1), что будет выполняться условие (2). Докажем, что тогда этим же свойством будет обладать и любое множество, содержащее $n+1$ элемент.

Пусть множество B содержит $n+1$ элемент. Выберем любой элемент $b \in B$ и обозначим $A = B \setminus \{b\}$. Множество A содержит n элементов, и по предположению индукции все подмножества множества A можно расположить в виде упорядоченного набора (1) так, чтобы они удовлетворяли условию (2). Рассмотрим упорядоченный набор множеств

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_m,\ A_m \cup \{b\},\ A_{m-1} \cup \{b\},\ \ldots \\ \ldots,\ A_2 \cup \{b\},\ A_1 \cup \{b\}. \tag{3}$$

Все члены конечной последовательности (3) различны, и каждое подмножество множества B встречается в этой последовательности. Докажем, что упорядоченный набор (3) множеств удовлетворяет условию, аналогичному условию (2). Для этого вычислим разности последовательных членов набора (3). По предположению индукции при $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$ одно из множеств $A_{i+1} \setminus A_i$ и $A_i \setminus A_{i+1}$ пусто, а другое содержит 1 элемент. Следовательно, одно из множеств $(A_{i+1} \cup \{b\}) \setminus (A_i \cup$

$\cup \{b\}) = A_{i+1} \setminus A_i$ и $(A_i \cup \{b\}) \setminus (A_{i+1} \cup \{b\}) = A_i \setminus A_{i+1}$ пусто, а другое содержит один элемент. Кроме того, непосредственно видно, что $A_m \setminus (A_m \cup \{b\}) = \varnothing$, а $(A_m \cup \{b\}) \setminus A_m = \{b\}$. Таким образом упорядоченный набор множеств (3) удовлетворяет условию, аналогичному условию (2). Тем самым утверждение доказано.

Принцип математической индукции позволяет утверждать, что все подмножества любого конечного множества можно расположить в виде упорядоченного набора (1), удовлетворяющего условию (2).

Примечание. Задача 137 допускает интересную геометрическую интерпретацию. Рассмотрим случай $n = 3$. Если $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, то каждое подмножество A' множества A можно отождествить с точкой (e_1, e_2, e_3), координаты которой равны либо 0, либо 1 по следующему правилу:

$$e_j = \begin{cases} 0, & \text{если } a_j \notin A', \\ 1, & \text{если } a_j \in A'. \end{cases}$$

Такие точки располагаются в вершинах куба, задаваемого единичными векторами, которые направлены по осям координат.

Пусть A' и A'' — подмножества множества A. Одно из множеств $A' \setminus A''$ и $A'' \setminus A'$ пусто, другое содержит 1 элемент в том и только в том случае, если точки, соответствующие подмножествам A' и A'' отличаются одной координатой. Такие точки принадлежат одному из ребер куба. Следовательно, исходную задачу можно сформулировать так: *существует ломаная, образуемая некоторыми ребрами куба и проходящая только один раз через каждую из его вершин.*

Аналогичную геометрическую интерпретацию задача допускает и при $n \neq 3$. Единственное отличие состоит в том, что вместо куба придется рассматривать n-мерный гиперкуб.

138. Докажем, что если a — четное натуральное число, не делящееся на 5, и s_n — сумма цифр числа a^n при $n = 1, 2, \ldots$, то последовательность $\{s_n\}$ неограниченно возрастает.

Пусть $a_1, a_2, \ldots$ — цифры в десятичной записи числа a^n, считая справа. Все члены этой последовательности при достаточно больших номерах равны нулю. Итак,

$$a^n = (\ldots a_3 a_2 a_1)_{10}.$$

Цифра a_1 отлична от нуля, так как по предположению число a не делится на 5 и, следовательно, число a^n также не делится на 5.

Лемма. *Если*

$$1 \leqslant j \leqslant \frac{1}{4} n, \qquad (1)$$

то по крайней мере одна из цифр $a_{j+1}, a_{j+2}, \ldots, a_{4j}$ *числа* a^n *отлична от нуля.*

Доказательство. Если бы при некотором натуральном j, удовлетворяющем неравенству (1), выполнялось бы соотношение $a_{j+1} = a_{j+2} = \ldots = a_{4j} = 0$, то, обозначив

$$c = (a_j a_{j-1} \ldots a_2 a_1)_{10},$$

мы будем иметь

$$a^n - c = (\ldots a_{4j+2} a_{4j+1} 00 \ldots 0)_{10}.$$

Следовательно, $10^{4j} \mid a^n - c$ [1] и тем более

$$2^{4j} \mid a^n - c. \qquad (2)$$

Поскольку a — четное число, то $2^n \mid a^n$, откуда (в силу неравенства $4j \leqslant n$) получаем

$$2^{4j} \mid a^n. \qquad (3)$$

Из соотношений (2) и (3) следует, что $2^{4j} \mid a^n - (a^n - c) = c$. Но $2^{4j} = 16^j > 10^j > c$, поэтому $c = 0$, что невозможно, так как последняя цифра a_1 числа c отлична от нуля. Полученное противоречие означает, что утверждение леммы верно.

По доказанной лемме в каждом из приводимых ниже наборов цифр, встречающихся в десятичной записи числа a^n, по крайней мере одна цифра отлична от нуля:

$$\begin{array}{l} a_2,\ a_3,\ a_4, \\ a_5,\ a_6,\ a_7,\ \ldots,\ a_{16}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{4^k+1},\ a_{4^k+2},\ \ldots,\ a_{4^{k+1}}, \end{array} \qquad (4)$$

где число $j = 4^k$ удовлетворяет условию (1), то есть $4^k \leqslant \frac{1}{4} n$. Показатель степени k можно считать равным

[1] Запись $m|n$ означает, что число n делится на m. — *Прим. перев.*

наибольшему из целых чисел, удовлетворяющих неравенству

$$4^k \leqslant \frac{1}{4} n$$

или

$$4^{k+1} \leqslant n, \quad k+1 \leqslant \log_4 n,$$

то есть положить $k = [\log_4 n] - 1$, где $[x]$ — целая часть числа x (наибольшее из целых чисел, не превосходящих x).

Итак, последовательности (4) содержат различные цифры числа a^n, таких последовательностей всего $k+1$, и каждая из них содержит отличную от нуля цифру. Следовательно, сумма цифр s_n числа a^n не меньше $k+1 = [\log_4 n]$. Поскольку $[\log_4 n] > \log_4 n - 1$ и $\lim_{n\to\infty} \log_4 n = \infty$, а по доказанному $s_n \geqslant [\log_4 n]$, то

$$\lim_{k\to\infty} s_n = \infty.$$

139. I решение. Пусть $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, где $n \geqslant 1$. Тогда

$$|f'(x)| = |a_1 + 2a_2 x + \ldots + na_n x^{n-1}| \leqslant$$
$$\leqslant |a_1| + 2|a_2||x| + \ldots + n|a_n||x^{n-1}| <$$
$$< M(1 + |x| + |x|^2 + \ldots + |x|^{n-1}),$$

где

$$M > \max(|a_1|, 2|a_2|, \ldots, n|a_n|).$$

Если $|x| \leqslant 1$, то $|x|^k \leqslant 1$ при $k = 1, 2, \ldots, n-1$, в силу чего

$$1 + |x| + |x|^2 + \ldots + |x|^{n-1} \leqslant n. \qquad (1)$$

Если же $|x| > 1$, то $1 < |x| < |x|^2 < \ldots < |x|^n < x^{2n}$, в силу чего

$$1 + |x| + |x|^2 + \ldots + |x|^{n-1} < nx^{2n}. \qquad (2)$$

Неравенства (1) и (2) позволяют утверждать, что для любого $x \in \mathbb{R}$

$$|f'(x)| < Mn(1 + x^{2n}).$$

Эта оценка означает, что

$$f'(x) > -Mn(1 + x^{2n}). \qquad (3)$$

Пусть $F(x) = f(x) + Mn(x + x^{2n+1})$ и $G(x) = Mn(x + x^{2n+1})$. Тогда $f(x) = F - G$. Многочлены F и G монотонно возрастают, поскольку из неравенства (3) следует, что

$$F'(x) = f'(x) + Mn(1 + (2n+1)x^{2n}) \geqslant \geqslant f'(x) + Mn(1 + x^{2n}) > 0,$$
$$G'(x) = Mn(1 + (2n+1)x^{2n}) > 0.$$

II решение. Пусть $F(x)$ — первообразная функции $\frac{1}{2}(f'(x)^2 + f'(x) + 1)$, удовлетворяющая условию $F(0) = f(0)$, и пусть $G(x)$ — первообразная функции $\frac{1}{2}(f'(x)^2 - f'(x) + 1)$, удовлетворяющая условию $G(0) = 0$.

Ясно, что $F(x)$ и $G(x)$ — многочлены, причем монотонно возрастающие. Действительно, $F'(x) = \frac{1}{2}(f'(x)^2 + f'(x) + 1) > 0$ и $G'(x) = \frac{1}{2}(f'(x)^2 - f'(x) + 1) > 0$, так как многочлены $t^2 + t + 1$ и $t^2 - t +$ принимают только положительные значения.

Кроме того, $(F - G)' = F' - G' = f'$, поэтому $F(x) - G(x) = f(x) + C$, где C — постоянная. Сравнивая значения правой и левой частей в точке $x = 0$, находим, что $C = 0$. Таким образом, $F(x) - G(x) = f(x)$, что и требовалось доказать.

III решение. Докажем утверждение задачи методом математической индукции по степени многочлена f.

Если многочлен f тождественно равен некоторой постоянной ($f(x) \equiv c$), то $f(x) = (x + c) - x$, и многочлены $x + c$ и x монотонно возрастают. Предположим далее, что $f(x)$ — многочлен положительной степени и любой многочлен меньшей степени представи́м в виде разности двух монотонно возрастающих многочленов.

Если степень многочлена $f(x)$ четна (равна $2n$), то

$$f(x) = ax^{2n} + g(x), \qquad (4)$$

где степень многочлена $g(x)$ меньше $2n$. Пользуясь формулой бинома Ньютона, получаем

$$\frac{1}{2n+1}\left((x+a)^{2n+1}-x^{2n+1}\right)=ax^{2n}+h(x), \quad (5)$$

где $h(x)$ — многочлен степени меньше $2n$. Многочлены $(x+a)^{2n+1}$ и x^{2n+1} монотонно возрастают. По предположению индукции существуют такие монотонно возрастающие многочлены F_1 и G_1, что

$$g+h=F_1-G_1. \quad (6)$$

Следовательно, если положить $F(x)=F_1(x)+\frac{1}{2n+1}\times$ $\times(x+a)^{2n+1}$, $G(x)=G_1(x)+\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$, то соотношения (4), (5) и (6) позволяют записать многочлен $f(x)$ в виде $f(x)=F-G$. Многочлены F и G монотонно возрастают, поскольку каждый из них равен сумме двух монотонно возрастающих многочленов.

Если степень многочлена $f(x)$ нечетна (равна $2n-1$), то

$$f(x)=ax^{2n-1}+g(x), \quad (7)$$

где $g(x)$ — многочлен степени меньше $2n-1$. По предположению индукции существуют такие монотонно возрастающие многочлены F_1 и G_1, что

$$g=F_1-G_1. \quad (8)$$

Число a равно разности положительных чисел: $a=$ $=b-c$. Например, достаточно взять $b=|a|+1$, $c=$ $=|a|-a+1$, чтобы

$$ax^{2n-1}=bx^{2n-1}-cx^{2n-1} \quad (9)$$

и многочлены bx^{2n-1} и cx^{2n-1} были монотонно возрастающими. Таким образом, если $F(x)=F_1(x)+bx^{2n-1}$, $G(x)=G_1(x)+cx^{2n-1}$, то из соотношений (7), (8) и (9) получаем, что $f=F-G$, причем многочлены F и G монотонно возрастают как суммы монотонно возрастающих многочленов.

IV решение. Прежде всего заметим, что если $f_1=F_1-G_1$, $f_2=F_2-G_2$ и многочлены F_1, F_2, G_1, G_2 монотонно возрастают, то $f_1+f_2=(F_1+F_2)-(G_1+G_2)$ и многочлены F_1+F_2 и G_1+G_2 также монотонно возрастают. Аналогичным образом, если a — любое отлич-

ное от нуля вещественное число, то $af_1 = aF_1 - aG_1 = (-aG_1) - (-aF_1)$. При $a > 0$ монотонно возрастают многочлены aF_1 и aG_1, при $a < 0$ — многочлены $-aF_1$ и $-aG_1$.

Итак, сумму многочленов, представимых в виде разности монотонно возрастающих многочленов, и произведение монотонно возрастающего многочлена на постоянную также можно разложить в разность двух монотонно возрастающих многочленов.

Отсюда следует, что если каждый одночлен x^n, где $n \geqslant 0$, представим в виде разности монотонно возрастающих многочленов, то любой многочлен также можно представить в виде разности монотонно возрастающих многочленов, так как любой многочлен — это конечная сумма одночленов 1, x, x^2, ..., умноженных на постоянные коэффициенты.

Одночлен x^{2n-1} равен разности монотонно возрастающих многочленов $2x^{2n-1}$ и x^{2n-1}. Одночлен 1 можно записать в виде разности монотонно возрастающих многочленов $x+1$ и x. Наконец, одночлен x^{2n}, где $n \geqslant 1$, представим в виде разности монотонно возрастающих многочленов $x^{4n-1} + x^{2n} + 2nx$ и $x^{4n-1} + 2nx$. В том, что последние два многочлена монотонно возрастают, нетрудно убедиться, вычислив их производную, принимающую только положительные значения:

$$(x^{4n-1} + 2nx)' = (4n-1)\,x^{4n-2} + 2n > 0 \quad \text{для} \quad x \in \mathbb{R},$$

$$(x^{4n-1} + x^{2n} + 2nx)' = (4n-1)\,x^{4n-2} + 2nx^{2n-1} + 2n \geqslant \geqslant 2n\,(x^{4n-2} + x^{2n-1} + 1) > 0$$

так как квадратный трехчлен $t^2 + t + 1$ принимает только положительные значения.

140. Число элементарных событий равно числу наборов из n величин, каждая из которых принимает лишь 2 значения: орел и решка, то есть 2^n. Благоприятным событием считается выпадение подряд 100 орлов. Вычислим сначала вероятность неблагоприятного события, то есть число наборов, не содержащих 100 орлов подряд.

Пусть $n = 100k + r$, где $k \geqslant 0$ и $0 \leqslant r < 100$. Тогда любой набор из n чисел состоит из k наборов по 100 чисел в каждом и 1 набора из r чисел. Общее число наборов из 100 чисел, каждое из которых принимает

2 значения, равно 2^{100}, поэтому если исключить последовательность, состоящую из 100 орлов, то останется $2^{100}-1$ наборов из 100 чисел. Таким образом, каждый набор из n чисел, не содержащий 100 орлов подряд, состоит из k таких наборов по 100 чисел и некоторого набора из r чисел. Следовательно, число неблагоприятных событий не больше $(2^{100}-1)^k \cdot 2^r$.

Это означает, что

$$1 \geqslant p_n \geqslant 1 - \frac{(2^{100}-1)^k \cdot 2^r}{2^{100k+r}} = 1 - \left(1 - \frac{1}{2^{100}}\right)^k. \qquad (1)$$

Если n стремится к бесконечности, то k также неограниченно возрастает. Когда $0 < q < 1$, тогда $\lim\limits_{k\to\infty} q^k = 0$ и потому $\lim\limits_{k\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{100}}\right)^k = 0$. Поскольку числовые последовательности $\{1\}$ и $\left\{1 - \left(1 - \frac{1}{2^{100}}\right)^k\right\}$, ограничивающие последовательность $\{p_n\}$, сходятся к одному и тому же пределу, равному 1, то и $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 1$.

141. Многогранником называется ограниченное множество точек пространства, расположенных не в одной плоскости и принадлежащих одновременно ограниченному числу полупространств. Поскольку полупространство — выпуклое множество, а общая часть выпуклых множеств также представляет собой выпуклое множество, то каждый многогранник — выпуклое множество.

Из выпуклости многогранника, в частности, следует, что если каждая из двух его вершин P и Q принадлежит одной и той же паре граней, то PQ — ребро многогранника: отрезок PQ принадлежит каждой из двух граней, а значит, и их общей части.

Пусть вершина A_0 многогранника W принадлежит ровно трем его ребрам A_0A_1, A_0A_2 и A_0A_3. Поскольку многогранник W обладает центром симметрии, то вершина A_0', симметричная вершине A_0, также принадлежит ровно трем ребрам $A_0'A_1'$, $A_0'A_2'$ и $A_0'A_3'$, где A_i' $(i = 1, 2, 3)$ — точки, симметричные точкам A_i. Пусть π_i — плоскость, проходящая через центр симметрии многогранника W и ребро A_0A_i, где $i = 1, 2, 3$. Плоскость π_i содержит также ребро $A_0'A_i'$, и из условий задачи следует, что

$W \cap \pi_i$ имеет форму четырехугольника. Ясно, что это — четырехугольник $A_0 A_i A'_0 A'_i$.

Пусть S_{jk} ($j \neq k$; $j, k \in \{1, 2, 3\}$) — грань многогранника W, проходящая через вершины A_0, A_j, A_k, а S'_{jk} — симметричная ей грань. Если числа j и k отличны от i и принадлежат множеству $\{1, 2, 3\}$, то плоскость π_i пересекает грань S_{jk}. Так как $\pi_i \cap W$ — четырехугольник $A_0 A_i A'_0 A'_i$, $A_0 \in S_{jk}$, $A'_0 \notin S_{jk}$ и $A_i \notin S_{jk}$, то $A'_i \in S_{jk}$. Аналогичным образом можно доказать, что $A_i \in S'_{jk}$.

Если числа i, j, k попарно не совпадают и принадлежат множеству $\{1, 2, 3\}$, то, как доказано выше, A_i, $A'_j \in S'_{jk}$, A_i, $A'_j \in S_{ik}$. Поскольку многогранник W выпуклый, то можно утверждать (см. замечание, приведенное в начале решения), что $A_i A'_j$ — ребро многогранника W при $i \neq j$. Каждый из четырехугольников $A_0 A_i A'_j A_k$ и $A'_0 A'_i A_j A'_k$ является гранью многогранника W. Таким образом, у многогранника W имеется 6 четырехугольных граней. Эти грани попарно параллельны, так как многогранник W обладает центром симметрии. Следовательно, многогранник W — параллелепипед.

Примечание. В приведенном выше решении мы не использовали предположение о том, что сечение многогранника W плоскостью, проходящей через центр симметрии и ребро, имеет форму параллелограмма. Достаточно было бы предположить, что сечение имеет форму четырехугольника.

142. Пусть P_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) — выбранные точки на прямой. A — объединение заданных отрезков общей длиной меньше 1 и I_i — отрезок длиной n, середина которого совпадает с точкой P_i.

Множество $A \cap I_i$, очевидно, представляет собой объединение отрезков общей длиной меньше 1. Пусть φ_i означает сдвиг на вектор $P_i P_1$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Поскольку сдвиг не изменяет длину отрезков, то $\varphi_i(I_i) = I_1$ и

$$I = \bigcup_{i=1}^{n} \varphi_i (A \cap I_i)$$

— объединение отрезков общей длиной меньше n, причем $I \subset I_1$. По построению, длина отрезка I_1 равна n. Следовательно, существует точка Q, принадлежащая множеству $I_1 - I$.

Докажем, что сдвиг φ на вектор P_1Q удовлетворяет условиям задачи. Так как $Q \in I_1$, P_1 — середина отрезка I_1 и длина I_1 равна n, то $P_1Q \leqslant \frac{n}{2}$. Следовательно, для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ образ точки P_i при сдвиге φ принадлежит отрезку I_i: $\varphi(P_i) \in I_i$.

Если бы при некотором i образ $\varphi(P_i)$ точки P_i принадлежал объединению заданных отрезков A ($\varphi(P_i) \in A$), то, поскольку $\varphi(P_i) \in I_i$, мы могли бы утверждать, что $\varphi(P_i) \in A \cap I_i$, откуда

$$\varphi_i(\varphi(P_i)) \in \varphi_i(A \cap I_i) \subset I. \qquad (1)$$

Преобразование $\varphi_i\varphi$ представляет собой сдвиг на вектор $\overrightarrow{P_1Q} + \overrightarrow{P_iP_1} = \overrightarrow{P_iQ}$, поэтому $\varphi_i(\varphi(P_i)) = Q$. Но тогда из (1) следует, что $Q \in I$, и мы приходим к противоречию, так как $Q \in I_1 \setminus I$.

Полученное противоречие доказывает, что $\varphi(P_i) \notin A$ при любом $i = 1, 2, \ldots, n$.

143. I решение. Выберем натуральное число k так, чтобы выполнялось неравенство $n \leqslant 2^k$. Пусть q и r — частное и остаток от деления числа $2^k m$ на n, то есть пусть $2^k m = qn + r$, где $0 \leqslant r < n$. Тогда

$$\frac{m}{n} = \frac{2^k m}{2^k n} = \frac{qn + r}{2^k n} = \frac{q}{2^k} + \frac{r}{2^k n}. \qquad (1)$$

Так как $m/n < 1$, то $qn \leqslant qn + r = 2^k m < 2^k n$, откуда $q < 2^k$. Следовательно, запись числа q в двоичной системе имеет вид

$$q = q_0 + q_1 \cdot 2 + q_2 \cdot 2^2 + \ldots + q_{k-1} \cdot 2^{k-1},$$

где двоичные цифры q_i равны 0 или 1. Но тогда

$$\frac{q}{2^k} = q_0 \frac{1}{2^k} + q_1 \frac{1}{2^{k-1}} + q_2 \frac{1}{2^{k-2}} + \ldots + q_{k-1} \frac{1}{2}. \qquad (2)$$

Числа r и k по определению удовлетворяют неравенству $r < n \leqslant 2^k$. Таким образом, двоичная запись числа r имеет вид

$$r = r_0 + r_1 2 + r_2 2^2 + \ldots + r_{k-1} 2^{k-1},$$

где цифры r_j равны 0 или 1, откуда

$$\frac{r}{2^k n} = r_0 \frac{1}{2^k n} + r_1 \frac{1}{2^{k-1} n} + \ldots + r_{k-1} \frac{1}{2n}. \qquad (3)$$

Кроме того, поскольку $r < n$, то при $j = 0, 1, \ldots, k-1$ выполняется неравенство

$$r_j \frac{1}{2^{k-j} n} = \frac{r_j 2^j}{2^k n} \leqslant \frac{r}{2^k n} < \frac{1}{2^k}.$$

Таким образом, каждое отличное от нуля слагаемое в сумме (3) меньше любого отличного от нуля слагаемого в сумме (2). Это означает, что суммы (2) и (3) содержат различные слагаемые.

Итак, из соотношений (1), (2) и (3) мы получаем представление числа m/n в виде суммы неповторяющихся дробей вида $1/t$, где t — натуральное число.

II решение. Докажем методом математической индукции по m, что каждую дробь m/n, где $(m, n) = 1$, принадлежащую интервалу $(0, 1)$, можно представить в виде суммы величин, обратных неповторяющимся натуральным числам.

При $m = 1$ утверждение верно:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{6n}$$ [1].

Пусть m — натуральное число больше 1. Предположим, что наше утверждение выполняется для натуральных чисел, которые меньше m. Докажем, что тогда оно верно и для m.

Пусть q и r — частное и остаток от деления числа n на m, то есть пусть

$$n = qm + r, \qquad (4)$$

где $0 \leqslant r < m$.

Поскольку $0 < \frac{m}{n} < 1$, то $m < n$ и $q > 0$. Если бы $r = 0$, то из соотношения (4) следовало бы, что n делится на $m > 1$. Это противоречило бы предположению о том, что m и n — взаимно простые числа. Отсюда мы заключаем, что $r > 0$ и $m - r < m$.

[1] И даже просто $1/n = 1/n$. — *Прим. ред.*

Запишем соотношение (4) в виде $n=(q+1)m-(m-r)$. Тогда

$$\frac{m}{n}-\frac{1}{q+1}=\frac{(q+1)m-n}{n(q+1)}=\frac{m-r}{n(q+1)}. \qquad (5)$$

Поскольку $m-r<m$, то по предположению индукции число $\frac{m-r}{n(q+1)}$ представимо[1] в виде суммы величин, обратных попарно различным натуральным числам

$$\frac{m-r}{n(q+1)}=\frac{1}{t_1}+\ldots+\frac{1}{t_k}. \qquad (6)$$

Поскольку $n>m>1$, то из соотношения (6) получаем, что при $i=1, 2, \ldots, k$ выполняется неравенство $t_i>q+1$. Подставляя в соотношение (5) разложение (6) для $\frac{m-r}{n(q+1)}$, запишем дробь m/n в виде

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{q+1}+\frac{1}{t_1}+\ldots+\frac{1}{t_k}.$$

Итак, мы получили разложение дроби m/n в сумму величин, обратных попарно различным натуральным числам. Тем самым в силу принципа математической индукции утверждение задачи доказано для любого натурального m.

144. Напомним, что площадь эллипса с полуосями a и b равна πab.

Пусть φ — отображение плоскости на себя, задаваемое выражением $\varphi(x, y)=(x, ky)$, где k — фиксированное положительное число. Такое преобразование называется сжатием (при $k<1$) или растяжением (при $k>1$). Более точно такое преобразование называется сжатием к оси x с коэффициентом k или растяжением от оси x с коэффициентом k. Ясно, что преобразованием, обратным сжатию к оси x с коэффициентом k (растяжению от оси x с коэффициентом k), является растяжение от оси x с коэффициентом $1/k$ (сжатие к оси x с коэффициентом $1/k$).

---

[1] Строго говоря, в предположение индукции входит еще несократимость дроби. Но если $(m-r)/n(q+1)=m_1/n_1$, где $(m_1, n_1)=1$, то $m_1<m-r<m$, и, воспользовавшись предположением индукции, получаем (6). — *Прим. ред.*

Как известно, если φ — сжатие (растяжение) к оси x (от оси x) с коэффициентом k, а F — некоторая фигура, то площадь образа фигуры $\varphi(F)$ равна площади фигуры F, умноженной на k.

Лемма. *Пусть E — эллипс, заданный уравнением*

$$\frac{(x-c_1)^2}{a^2}+\frac{(y-c_2)^2}{b^2}=1, \qquad (1)$$

а φ — сжатие (растяжение) к оси x (от оси x) с коэффициентом $k=a/b$. Тогда $\varphi(E)$ — окружность, заданная уравнением

$$(x-c_1)^2+\left(y-\frac{a}{b}c_2\right)^2=a^2. \qquad (2)$$

Доказательство. Пусть (x, y) — точка, принадлежащая эллипсу E, то есть точка, координаты которой удовлетворяют уравнению (1). Докажем, что тогда координаты точки $\varphi(x, y)=\left(x, \frac{a}{b}y\right)$ удовлетворяют уравнению (2). Подставляя координаты $\left(x, \frac{a}{b}y\right)$ образа точки (x, y) в уравнение (2), получаем

$$(x-c_1)^2+\left(\frac{a}{b}y-\frac{a}{b}c_2\right)^2=a^2\left(\frac{(x-c_1)^2}{a^2}+\frac{(y-c_2)^2}{b^2}\right)=a^2.$$

Аналогичным образом можно доказать и обратное утверждение: координаты любой точки, удовлетворяющие уравнению (2), имеют вид $\varphi(x, y)$, где $(x, y)\in E$.

Из доказанной леммы следует, что если φ — сжатие к оси x с коэффициентом a/b, то образом любого эллипса с осями симметрии, параллельными осям прямоугольных координат, и полуосями a и b будет окружность радиуса a.

После этих предварительных замечаний перейдем к решению задачи. Прежде всего докажем, что если многоугольник W обладает центром симметрии и эллипс E, содержащий многоугольник W, имеет наименьшую площадь, то центр симметрии многоугольника совпадает с центром симметрии эллипса.

Предположим, что центр симметрии P многоугольника W не совпадает с центром эллипса E. Пусть ψ — преобразование симметрии относительно центра P. Тогда

$\psi(E)$ — эллипс, содержащий многоугольник $\psi(W) = W$, и отличный от эллипса E. Соответственные оси симметрии эллипсов E и $\psi(E)$ параллельны, поскольку при преобразовании симметрии относительно точки образ любого отрезка параллелен исходному отрезку. Оси координат выберем так, чтобы они были параллельны осям эллипса E (рис. 99).

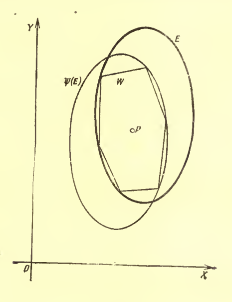


Рис. 99.

Эллипсы E и $\psi(E)$ конгруэнтны, поэтому из леммы следует, что существует такое сжатие (растяжение) φ к оси x (от оси x), что фигуры $\varphi(E)$ и $\varphi(\psi(E))$ будут окружностями равных радиусов (рис. 100) с центрами в точках O_1 и O_2. Эти окружности содержат фигуру (многоугольник) $\varphi(W)$.

Пусть O — середина отрезка O_1O_2, а P_1 — одна из точек пересечения окружностей $\varphi(E)$ и $\varphi(\psi(E))$. Ясно, что круг Q с центром в точке O и радиусом OP_1 содержит пересечение кругов $\varphi(E)$ и $\varphi(\psi(E))$. Кроме того, $OP_1 < O_1P_1$. Следовательно, площадь круга Q меньше площади круга $\psi(E)$.

Пусть φ^{-1} — растяжение (сжатие), обратное сжатию (растяжению) φ. По лемме фигура $\varphi^{-1}(Q)$ представляет собой эллипс, площадь которого меньше площади эллипса $\varphi^{-1}(\varphi(E)) = E$. Поскольку $Q \supset \varphi(W)$, то $\varphi^{-1}(Q) \supset \varphi^{-1}(\varphi(W)) = W$. Итак, мы приходим к противоречию с предположением о том, что эллипс E обладает наименьшей площадью среди всех эллипсов, содержащих многоугольник W. Следовательно, центр сим-

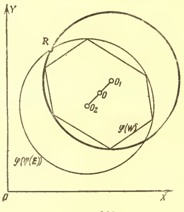


Рис. 100.

метрии многоугольника W совпадает с центром симметрии любого эллипса наименьшей площади, содержащего многоугольник W.

Предположим, что некоторые два эллипса E_1 и E_2 содержат многоугольник W и обладают наименьшей площадью среди всех эллипсов, содержащих этот многоугольник. По доказанному выше центр симметрии P многоугольника совпадает с центром каждого из эллипсов E_1 и E_2. Любое сжатие (растяжение) к оси x (от оси x) представляет собой аффинное преобразование а любое аффинное преобразование переводит эллипс в эллипс. Таким образом, доказанная выше лемма позволяет считать (после того, как выполнено соответствующее сжатие или растяжение), что один из двух эллипсов, например эллипс E_1, вырождается в окружность. Систему координат можно выбрать так, чтобы точка P совпала с началом координат, а оси симметрии

эллипса E_2 — с осями координат. Тогда уравнения эллипсов E_1 и E_2 примут следующий вид:

$$(E_1) \quad x^2 + y^2 = r^2,$$
$$(E_2) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{где } a \neq b.$$

Поскольку площади эллипсов E_1 и E_2 равны, то $ab = r^2$. Следовательно, точка (x, y) принадлежит множеству $E_1 \cap E_2$ в том и только в том случае, если

$$x^2 + y^2 \leqslant ab,$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1. \qquad (2)$$

Складывая отдельно левые и правые части этих неравенств, получаем

$$\left(1 + \frac{1}{a^2}\right) x^2 + \left(1 + \frac{1}{b^2}\right) y^2 \leqslant ab + 1,$$

или после несложных преобразований

$$\frac{x^2}{\frac{a^2(ab+1)}{a^2+1}} + \frac{y^2}{\frac{b^2(ab+1)}{b^2+1}} \leqslant 1. \qquad (3)$$

Таким образом, множество $E_1 \cap E_2$ содержится в эллипсе (3). Поскольку $(a^2+1)(b^2+1) - (ab+1)^2 = (a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1) - (a^2b^2 + 2ab + 1) = (a^2 + b^2 - 2ab) = (a - b)^2 > 0$ при $a \neq b$, то

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1) > (ab + 1)^2. \qquad (4)$$

Это означает, что квадрат площади S эллипса (3) в силу неравенства (4) удовлетворяет неравенству

$$S^2 = \pi^2 \frac{a^2b^2(ab+1)^2}{(a^2+1)(b^2+1)} < \pi^2 a^2 b^2.$$

Так как квадрат площади эллипса E_2 равен $\pi^2 a^2 b^2$, то это неравенство означает, что площадь эллипса (3) меньше площади эллипса E_2. Полученное противоречие доказывает, что существует не более чем один эллипс наименьшей площади, содержащий многоугольник W.

145. Прежде всего докажем следующую лемму.

Лемма. *Если прямые AB и PQ пересекаются под прямым углом в точке P, то число точек луча PQ, из которых отрезок AB виден под углом α, равно 0, 1 или 2.*

Доказательство. Как известно, множество точек, лежащих в полуплоскости, ограниченной прямой AB и содержащей точку Q, из которых отрезок AB виден под углом α, представляет собой дугу некоторой окружности. Эта дуга имеет с лучом 0, 1 или 2 общие точки в зависимости от того, как отрезок AB расположен относительно точки P, и от величины угла α (рис. 101).

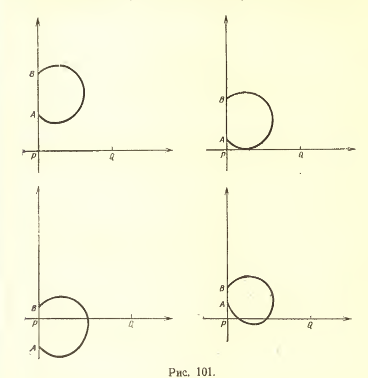


Рис. 101.

Следствие. *Если прямая AB перпендикулярна плоскости π, то множество точек плоскости π, из которых отрезок AB виден под углом α $(0 < \alpha < \pi)$, либо пусто, либо представляет собой окружность или две концентрические окружности.*

Доказательство. Пусть P — точка пересечения прямой AB с плоскостью π, а Q — любая точка плоскости π, отличная от P. По доказанной выше лемме

луч PQ содержит не более двух точек, из которых отрезок AB виден под углом α. При повороте вокруг прямой AB эти точки описывают не более двух концентрических окружностей K_1 и K_2, из каждой точки которых отрезок AB виден под углом α. По лемме из каждой точки плоскости π, не лежащей на окружностях K_1 и K_2, отрезок AB виден под углом, отличным от α.

Переходим к решению задачи. Пусть π — плоскость, перпендикулярная ребру AB и содержащая ребро с вершиной D, а P — точка пересечения прямой AB с плоскостью π. По условиям задачи отрезок AB виден из точек C и D под одним и тем же углом. Пользуясь следствием из леммы, мы заключаем, что либо

1) точки C и D лежат на одной окружности с центром в точке P, либо

2) точки C и D лежат на разных окружностях с центром в точке P.

В первом случае прямая, проходящая через середину отрезка CD перпендикулярно ему, содержит точку P и поэтому плоскость, заданная ребром AB и серединой ребра CD, перпендикулярна ребру CD.

Во втором случае перпендикуляр, восставленный из середины отрезка CD, не содержит точку P. В противном случае точка P была бы равноудалена от вершин C и D тетраэдра и эти вершины лежали бы на одной окружности с центром в точке P, что не верно. Следовательно, плоскость, заданная ребром AB и серединой ребра CD, не содержит прямой, проходящей через середину отрезка CD перпендикулярно ему, и поэтому не перпендикулярна ребру CD.

Таким образом, утверждение задачи во втором случае не выполняется. Первый случай встречается, в частности, тогда, когда точка P принадлежит отрезку AB, например, когда угол ACB тупой.

146. Пусть A_n — событие, состоящее в том, что лосось за n попыток не смог преодолеть первый водопад, а B_n — событие, состоящее в том, что лосось за n попыток не смог преодолеть оба водопада. Поскольку вероятность того, что лосось за одну попытку не преодолеет первый водопад, равна $1 - p$, а попытки независимы, то

$$p(A_n) = (1 - p)^n. \qquad (1)$$

Событие B_n состоит в том, что лосось либо не преодолевает за n попыток первый водопад, либо на k-й попытке $(1 \leqslant k \leqslant n)$ преодолевает первый водопад, а за остальные $n-k$ попыток не может преодолеть второй водопад, поэтому

$$p(B_n) = (1-p)^n + \sum_{k=1}^{n} (1-p)^{k-1} p (1-q)^{n-k}. \qquad (2)$$

Если $p = q$, то правая часть соотношения (2) преобразуется к виду

$$p(B_n) = (1-p)^n + \sum_{k=1}^{n} (1-p)^{n-1} p = \\ = (1-p)^n + np(1-p)^{n-1}. \qquad (3)$$

Если же $q = 1$, то

$$p(B_n) = (1-p)^n + (1-p)^{n-1} p = (1-p)^{n-1}, \qquad (4)$$

поскольку в этом случае лосось преодолевает второй водопад с первой попытки. Таким образом, событие B_n не происходит, если лосось не может преодолеть первый водопад за n попыток или преодолевает его лишь с n-й попытки.

Впрочем, если принять, что $0^0 = 1$, то соотношение (4) будет следовать из соотношения (2).

Если $p \neq q$ и $q < 1$, то формула суммы членов геометрической прогрессии позволяет следующим образом преобразовать правую часть выражения (2):

$$p(B_n) = (1-p)^n + p(1-q)^{n-1} \frac{1 - \left(\frac{1-p}{1-q}\right)^n}{1 - \left(\frac{1-p}{1-q}\right)} = \\ = (1-p)^n + (1-q)^n \frac{p}{p-q}\left[1 - \left(\frac{1-p}{1-q}\right)^n\right] = \\ = (1-p)^n + \frac{p}{p-q}\left[(1-q)^n - (1-p)^n\right] = \\ = \frac{p(1-q)^n - q(1-p)^n}{p-q},$$

то есть в рассматриваемом случае

$$p(B_n) = \frac{p(1-q)^n - q(1-p)^n}{p-q}. \qquad (5)$$

Если событие A_n не происходит, то тем более не происходит и событие B_n. Следовательно, $A_n \cap B_n = A_n$. По формуле условной вероятности получаем

$$p(A_n \mid B_n) = \frac{p(A_n \cap B_n)}{p(B_n)} = \frac{p(A_n)}{p(B_n)}. \qquad (6)$$

При $n = 1$ из условий задачи следует, что $p(A_n) = 1 - p$ и $p(B_n) = 1$. Подставляя значения $p(A_n)$ и $p(B_n)$ в формулу для условной вероятности (6), находим, что $p(A_n|B_n) = 1 - p$. В дальнейшем будем предполагать, что $n \geqslant 2$.

Заметим, что если $p \neq q$, то $p(B_n) \neq 0$. Действительно, если бы выполнялось равенство $p(B_n) = 0$, то из соотношения (5) мы получили бы, что $p(1-q)^n = q(1-p)^n$, откуда

$$\frac{p}{q} = \left(\frac{1-p}{1-q}\right)^n. \qquad (7)$$

Но если, например $p < q$, то $1 - p > 1 - q$ и равенство (7) не может выполняться. Аналогичным образом доказывается, что равенство (7) не может выполняться и при $p > q$.

Если $p = q$ и $p(B_n) = 0$, то из соотношения (3) следует, что $p = 1$. Следовательно, в том (и только в том) случае, если $p = q = 1$, условная вероятность $p(A_n|B_n)$ не существует. Вычислим ее в остальных случаях.

При $p = q < 1$ из соотношений (1), (3) и (6) получаем

$$p(A_n \mid B_n) = \frac{1-p}{1-p+np} = \frac{1-p}{1+(n-1)p}, \qquad (8)$$

а при $p < q = 1$ находим $p(A_n|B_n)$ из соотношений (1), (4) и (6)

$$p(A_n \mid B_n) = 1 - p. \qquad (9)$$

При $p \neq q < 1$ соотношения (1), (5) и (6) приводят к следующему выражению для условной вероятности:

$$p(A_n \mid B_n) = \frac{(1-p)^n (p-q)}{p(1-q)^n - q(1-p)^n} = \frac{(p-q)\left(\frac{1-p}{1-q}\right)^n}{p - q\left(\frac{1-p}{1-q}\right)^n}. \qquad (10)$$

Примечание. Выясним, как ведет себя в каждом из рассмотренных случаев предельное значение условной вероятности $g = \lim\limits_{n\to\infty} p(A_n \mid B_n)$. При $p = q < 1$ из соотношения (8) получаем, что $g = 0$. При $p < q = 1$ из соотношения (9) следует, что $g = 1 - p = 1 - \frac{p}{1}$. Если $p < q < 1$, то

$$1 - p > 1 - q \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1-p}{1-q}\right)^n = \infty.$$

Это означает, что для условной вероятности (10) $g = \frac{p-q}{-q} = 1 - \frac{p}{q}$. Если же $q < p \leqslant 1$, то $1 - p < 1 - q$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1-p}{1-q}\right)^n = 0$, поэтому для условной вероятности (10) $g = 0$.

Итак, во всех случаях $g = \max\left(0,\ 1 - \frac{p}{q}\right)$.

147. I решение. Предположим, что многочлен

$$p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n,$$

где $a_n \neq 0$, имеет целочисленные коэффициенты, которые по абсолютной величине меньше r, и делится на трехчлен $f(x) = x^2 - rx - 1$. Тогда

$$p = f \cdot h, \tag{1}$$

где многочлен $h(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_{n-2}x^{n-2}$, как следует из алгоритма деления многочленов, имеет целочисленные коэффициенты. Сравнивая коэффициенты многочленов в правой и левой частях равенства (1), получаем

$$a_0 = -b_0, \tag{2.0}$$

$$a_1 = -b_1 - rb_0, \tag{2.1}$$

$$a_2 = -b_2 - rb_1 + b_0 \tag{2.2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_k = -b_k - rb_{k-1} + b_{k-2} \quad (k = 2, 3, \ldots, n-2) \tag{2.k}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{n-2} = -b_{n-2} - rb_{n-3} + b_{n-4}, \tag{2.n − 2}$$

$$a_{n-1} = -rb_{n-2} + b_{n-3}, \tag{2.n − 1}$$

$$a_n = b_{n-2}. \tag{2.n}$$

Из последнего равенства следует, что $b_{n-2} \neq 0$. Из равенства $(2.n-1)$ мы заключаем, что $b_{n-3} \neq 0$ и знаки коэффициентов b_{n-2}, b_{n-3} совпадают (в противном случае выполнялось бы неравенство $|a_{n-1}| = |-rb_{n-2} + b_{n-3}| = |-rb_{n-2}| + |b_{n-3}| \geqslant r|b_{n-2}| \geqslant r$, противоречащее предположению о том, что $|a_{n-1}| < r$). Аналогичным образом из равенства $(2.n-2)$ получаем, что $b_{n-4} \neq 0$ и знаки коэффициентов b_{n-3}, b_{n-4} совпадают (в противном случае абсолютная величина коэффициента a_{n-2} удовлетворяла бы неравенству $|a_{n-2}| = |-b_{n-2} - rb_{n-3} + b_{n-4}| = |-b_{n-2}| + |-rb_{n-3}| + |b_{n-4}| \geqslant r|b_{n-3}| \geqslant r$, противоречащему предположению о том, что $|a_{n-2}| < r$).

Вообще, если при некотором $k \in \{2, 3, \ldots, n-2\}$ знаки коэффициентов b_k, b_{k-1} совпадают, то $b_{k-2} \neq 0$ и знаки коэффициентов b_{k-1}, b_k также совпадают [поскольку в противном случае из равенства $(2.k)$ можно было бы вывести неравенство $|a_k| = |-b_k| + |rb_{k-1}| + |b_{k-2}| \geqslant r$, противоречащее исходному предположению об абсолютной величине коэффициентов многочлена $p(x)$].

С помощью индукции убеждаемся в том, что числа $b_{n-2}, b_{n-3}, \ldots, b_1, b_0$ отличны от нуля и имеют одинаковые знаки. Но тогда из равенства (2.1) получаем $|a_1| = |-b_1 - rb_0| = |b_1| + |rb_0| \geqslant r$ вопреки условию.

Полученное противоречие доказывает, что многочлена $p(x)$ с целочисленными коэффициентами $|a_k| < r$ не существует.

II решение. Докажем сначала следующую лемму.

Лемма. *Если a — корень многочлена*

$$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n,$$

где $a_n \neq 0$, то $|a| \leqslant 1 + \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant n-1} \left|\frac{a_i}{a_n}\right|$.

Доказательство. Пусть $M = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant n-1} \left|\frac{a_i}{a_n}\right|$. Если $|a| \leqslant 1$, то утверждение леммы верно. Рассмотрим случай, когда $|a| > 1$. Поскольку a — корень многочлена $f(x)$, то

$$a_0 + a_1a + \ldots + a_{n-1}a^{n-1} = -a_na^n,$$

откуда

$$|a|^n = \left| \frac{a_0}{a_n} + \frac{a_1}{a_n} a + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} a^{n-1} \right| \leqslant$$
$$\leqslant M\left(1 + |a| + \ldots + |a|^{n-1}\right) =$$
$$= M \frac{|a|^n - 1}{|a| - 1} < M \frac{|a|^n}{|a| - 1}.$$

Итак, $|a| - 1 < M$, или $|a| < M + 1$.

Переходим теперь к решению задачи. Один из корней квадратного трехчлена $x^2 - rx - 1$ равен $x_1 = \frac{1}{2}\left(r + \sqrt{r^2 + 4}\right)$. Поскольку $\sqrt{r^2 + 4} > \sqrt{r^2} = r$, то

$$x_1 > r. \qquad (1)$$

Если бы многочлен

$$p(x) = p_0 + p_1 x + \ldots + p_n x^n,$$

где $p_n \neq 0$, делился на $x^2 - rx - 1$, то число x_1 было бы корнем многочлена $p(x)$. По доказанной выше лемме корень x_1 удовлетворял бы неравенству

$$x_1 \leqslant \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} \left| \frac{p_i}{p_n} \right| + 1. \qquad (2)$$

Поскольку $|p_n| \geqslant 1$ и $|p_i| \leqslant r - 1$ при $i = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$, то

$$\max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} \left| \frac{p_i}{p_n} \right| \leqslant \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} |p_i| \leqslant r - 1.$$

Сравнивая это неравенство с неравенством (2), мы видим, что $x_1 \leqslant r$, хотя выше было доказано неравенство (1): $x_1 > r$.

Полученное противоречие доказывает, что квадратный трехчлен $x^2 - rx - 1$ не является делителем отличного от тождественного нуля многочлена с целочисленными коэффициентами, абсолютная величина которых меньше r.

Примечание 1. В приведенном выше решении по существу осталось неиспользованным предположение о том, что многочлен $p(x)$ имеет целочисленные коэффициенты. Достаточно было бы предположить, что $|p_n| \geqslant 1$, $|p_i| \leqslant r - 1$ при $i = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

Примечание 2. Пусть $H(f)$ — наибольшая из абсолютных величин коэффициентов многочлена f. Для многочленов с

целочисленными коэффициентами в общем случае неверно утверждение о том, что если многочлен g делится на f, то $H(f) \leqslant H(g)$. Например, $(1-x+x^2)\cdot(1+2x+x^2)=1+x+x^3+x^4$.

148. Докажем сначала следующую лемму.

Лемма. *Если* $\varepsilon \geqslant 0$ *и вещественные числа* $s_1, s_2, \ldots, s_n$ *удовлетворяют условиям*

$$|s_1| \leqslant \varepsilon, \quad |s_{i+1}-s_i| \leqslant \varepsilon \quad (i=1, 2, \ldots, n-1), \qquad (1)$$

то существует такое натуральное число $k \leqslant n$, *что*

$$\left|s_k - \frac{1}{2} s_n\right| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon. \qquad (2)$$

Доказательство. Если $\varepsilon = 0$, то из неравенств (1) получаем, что $s_1 = s_2 = \ldots = s_n = 0$, и утверждение леммы выполнено. Предположим, что $\varepsilon > 0$.

Пусть a — наименьшее, а b — наибольшее из чисел $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Тогда числа $s_1, s_2, \ldots, s_n$ делят отрезок $[a, b]$ на меньшие отрезки, длина которых не превышает ε. Любое число из отрезка $[a, b]$ отстоит от одного из чисел $s_1, s_2, \ldots, s_n$ не более, чем на $\frac{1}{2}\varepsilon$. В частности, если $\frac{1}{2}s_n \in [a, b]$, то условие (2) выполнено. Предположим, что $\frac{1}{2}s_n \notin [a, b]$.

Из определения чисел a и b следует, что $s_n \in [a, b]$. Если $0 \in [a, b]$, то $\frac{1}{2}s_n \in [a, b]$, что противоречит принятому нами предположению.

Итак, пусть $0 \notin [a, b]$. Тогда знаки всех чисел $s_1, s_2, \ldots, s_n$ совпадают. Поскольку, изменив знаки всех чисел $s_1, s_2, \ldots, s_n$, мы не нарушим условий (1), (2), то можно считать, что числа $s_1, s_2, \ldots, s_n$ положительны. Тогда

$$0 < a \leqslant s_n \leqslant b, \qquad (3)$$

$$0 < a \leqslant s_1 \leqslant \varepsilon. \qquad (4)$$

Так как $\frac{1}{2}s_n \notin [a, b]$, то из неравенства (3) следует, что $0 < \frac{1}{2}a \leqslant \frac{1}{2}s_n < a$. Неравенство (4) позволяет преобразовать полученное неравенство к виду

$\left| a - \frac{1}{2} s_n \right| < \frac{1}{2} a \leqslant \frac{1}{2} \varepsilon$. Поскольку a — одно из чисел $s_1, s_2, \ldots, s_n$, то условие (2) выполнено.

Утверждение задачи непосредственно следует из доказанной леммы: достаточно положить

$$\varepsilon = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |a_i|, \quad s_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда $|s_1| = |a_1| \leqslant \varepsilon$ и $|s_{i+1} - s_i| = |a_{i+1}| \leqslant \varepsilon$ при $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Тем самым условия леммы выполнены. Из леммы следует, что при некотором натуральном $k \leqslant n$ выполняется неравенство $|2s_k - s_n| \leqslant \varepsilon$ или

$$\left| \sum_{i=1}^{k} a_i - \sum_{i=k+1}^{n} a_i \right| \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |a_i|.$$

149. Докажем сначала 2 леммы.

Лемма 1. *Для заданного натурального числа n существует не более двух таких натуральных чисел $k \leqslant n-3$, что биномиальные коэффициенты $\binom{n}{k}$, $\binom{n}{k+1}$, $\binom{n}{k+2}$ являются последовательными членами арифметической прогрессии.*

Доказательство. Если числа $\binom{n}{k}$, $\binom{n}{k+1}$, $\binom{n}{k+2}$ — последовательные члены арифметической прогрессии, то

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+2} = 2\binom{n}{k+1}.$$

Умножая обе части этого равенства на $\frac{(k+2)!\,(n-k)!}{n!}$, получаем

$$(k+2)(k+1) + (n-k)(n-k-1) = 2(k+2)(n-k).$$

Это соотношение представляет собой квадратное уравнение относительно k. Следовательно, оно имеет не более двух корней.

Лемма 2. *Для заданного натурального числа n существует не более чем одно такое натуральное число $k \leqslant n-1$, что $\binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}$.*

Доказательство. Умножая обе части равенства $\binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}$ на $\frac{(k+1)!\,(n-k)!}{n!}$, получаем $k+1 = n-k$. Это соотношение представляет собой уравнение первой степени относительно k. Следовательно, в множестве натуральных чисел меньше n оно может иметь не более одного решения.

Переходим к решению задачи. Для упрощения записи введем обозначения. Пусть $a_j = \binom{n}{j}$ при $j = 1, 2, \ldots, n$. Предположим, что числа

$$a_r, \quad a_{r+1}, \quad a_{r+2}, \quad a_{r+3} \qquad (1)$$

— последовательные члены арифметической прогрессии. Так как $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, или $a_k = a_{n-k}$, то числа a_{n-r-3}, a_{n-r-2}, a_{n-r-1}, a_{n-r} — также последовательные члены арифметической прогрессии.

Таким образом, мы получаем отрезки арифметической прогрессии, каждый из которых содержит по 3 члена:

$$a_r, \quad a_{r+1}, \quad a_{r+2},$$
$$a_{r+1}, \quad a_{r+2}, \quad a_{r+3},$$
$$a_{n-r-3}, \quad a_{n-r-2}, \quad a_{n-r-1},$$
$$a_{n-r-2}, \quad a_{n-r-1}, \quad a_{n-r}.$$

Из леммы 1 следует, что множество $\{r, r+1, n-r-3, n-r-2\}$ содержит не более двух различных чисел. Так как r, $r+1$ и $n-r-3$, $n-r-2$ — последовательные натуральные числа, то $r = n-r-3$ и $r+1 = n-r-2$. Следовательно, $a_{r+1} = a_{n-r-2} = a_{r+2}$, или все члены арифметической прогрессии (1) равны. Но из леммы 2 следует, что это невозможно.

Полученное противоречие доказывает, что биномиальные коэффициенты (1) не образуют отрезка арифметической прогрессии.

Примечание. Можно доказать, что если при некоторых натуральных числах n и r, где $r \leqslant n-2$, биномиальные коэффициенты $\binom{n}{r}$, $\binom{n}{r+1}$, $\binom{n}{r+2}$ являются последовательными членами арифметической прогрессии, то существует

такое натуральное число $m \geqslant 3$, для которого выполняются соотношения

$$n = m^2 - 2, \quad r = \frac{m^2 - m}{2} - 2, \quad \text{или } r = \frac{m^2 + m}{2} - 2. \qquad (*)$$

Наоборот, если числа n и r заданы соотношениями (*), то биномиальные коэффициенты $\binom{n}{r}$, $\binom{n}{r+1}$, $\binom{n}{r+2}$ являются последовательными членами арифметической прогрессии.

Например, полагая $m = 3$, получаем отрезок арифметической прогрессии $\binom{7}{1}$, $\binom{7}{2}$, $\binom{7}{3}$.

150. I решение. Докажем сначала лемму.

Лемма. *Если плоская фигура F разделена на части r прямыми, то эти части можно раскрасить в 2 цвета так, что любые две из них, имеющие общий отрезок, будут окрашены в различные цвета.*

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции по r. При $r = 1$ утверждение леммы очевидно, поскольку прямая делит плоскость на две полуплоскости. Части фигуры F, принадлежащие одной полуплоскости, закрасим одним цветом, части, принадлежащие другой полуплоскости, — другим.

Пусть r — некоторое натуральное число. Предположим, что при r прямых части фигуры F можно раскрасить в два цвета так, чтобы удовлетворить условиям леммы. Докажем, что тогда утверждение леммы будет выполняться и при $(r+1)$ прямых, делящих фигуру F на части. Проведя $(r+1)$-ю прямую, мы разделим плоскость на 2 полуплоскости. Части фигуры F, принадлежащие одной полуплоскости, оставим раскрашенными в те цвета, в которые они были раскрашены до того, как мы провели $(r+1)$-ю прямую, а части, принадлежащие другой полуплоскости, перекрасим заново (изменим цвет каждой части на другой). Условия леммы при этом, очевидно, будут выполнены.

Переходим к решению задачи. Поскольку данный k-угольник разделен некоторым числом прямых (диагоналей), то полученные при таком разбиении части (треугольники) по доказанной лемме можно раскрасить в два цвета так, чтобы треугольники, имеющие общую сторону, отличались по цвету.

Поскольку по условиям задачи число диагоналей, выходящих из каждой вершины A заданного n-угольника, четно, то число треугольников, одна из вершин которых совпадает с точкой A, нечетно. Смежные треугольники раскрашены в различные цвета и поэтому первый и последний треугольники окрашены в один и тот же цвет. Отсюда следует, что треугольники, одной из сторон которых служит сторона заданного n-угольника, всегда окрашены в один и тот же цвет.

Сумма числа сторон n-угольника и числа всех проведенных диагоналей равна числу сторон треугольников, окрашенных в этот же цвет, и, следовательно, делится на 3. В то же время число проведенных диагоналей равно числу сторон треугольников, окрашенных в другой цвет, поэтому число диагоналей также делится на 3. Отсюда мы заключаем, что и число сторон n-угольника, равное разности двух чисел, кратных 3, делится на 3.

Примечание. Если в условиях задачи треугольники заменить k-угольниками ($k > 3$), то, произведя аналогичную замену в приведенном выше решении, мы получим, что число n делится на k.

II решение. Докажем сначала лемму.

Лемма. *Если в n-угольнике $A_1 A_2 \ldots A_n$ проведено некоторое число диагоналей, причем из каждой вершины $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ выходит четное число диагоналей, то из вершины A_n также выходит четное число диагоналей.*

Доказательство. Пусть из вершины A_i выходит k_i диагоналей, где $i = 1, 2, \ldots, n$. По условиям леммы числа $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$ четные. Поскольку каждая диагональ проходит через две вершины, то число $k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ четно. Следовательно, последнее слагаемое этой суммы, то есть число k_n, также четно.

Переходим к решению задачи. Воспользуемся методом математической индукции по $n \geqslant 3$.

При $n = 3$ утверждение задачи верно. Предположим, что n — натуральное число больше 3 и утверждение задачи выполняется для всех натуральных чисел r, удовлетворяющих неравенству $3 \leqslant r < n$. Тогда, если некоторое множество диагоналей r-угольника делит его на треугольники и удовлетворяет условиям задачи 1 и 2, то r делится на 3.

Пусть P — множество диагоналей n-угольника, которые делят его на треугольники и удовлетворяют условиям задачи (1) и (2). Пусть из некоторой вершины A заданного n-угольника выходят по крайней мере 2 диагонали, принадлежащие множеству P. Выберем две диагонали AB и AC, проходящие через вершину A и принадлежащие множеству P так, чтобы внутри угла A_1AB содержалось четное число диагоналей, выходящих из вершины A и принадлежащих множеству P, а внутри угла BAC не оказалось ни одной диагонали, выходящей

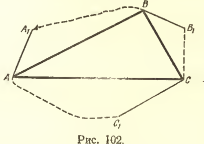


Рис. 102.

из вершины A и принадлежащей множеству P (рис. 102). Тогда диагональ BC принадлежит множеству P.

Рассмотрим многоугольник $AA_1 \ldots B$. Из каждой его вершины, за исключением, быть может, B, выходит четное число диагоналей, принадлежащих множеству P. По доказанной лемме из вершины B также выходит четное число диагоналей, принадлежащих множеству P.

Аналогичные утверждения применимы и к многоугольникам $BB_1 \ldots C$ и $CC_1 \ldots A$. Поскольку у каждого из многоугольников $AA_1 \ldots B$, $BB_1 \ldots C$ и $CC_1 \ldots A$ число сторон меньше n, то по предположению индукции число сторон каждого из них делится на 3. Сумма числа сторон всех трех многоугольников равна $n+3$, поскольку помимо сторон заданного многоугольника в нее входят еще отрезки AB, BC, CA. Следовательно, число n делится на 3, что и требовалось доказать.

151. Пусть $s_j = a_1 + a_2 + \ldots + a_j$, где $j = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n$. По условию задачи сумма любого числа pn первых членов последовательности $\{a_k\}$ равна нулю, поэтому $s_{j+n} = s_j$ при $j = 1, 2, \ldots$ Это означает, что

число различных членов последовательности $\{s_n\}$ конечно. Пусть s_m — наименьшее из чисел $s_1, s_2, \ldots$. Докажем, что число N, о котором говорится в задаче, достаточно выбрать равным $m+1$. Действительно, при любом $k \geqslant 0$

$$\sum_{i=m+1}^{m+1+k} a_i = \sum_{i=1}^{m+1+k} a_i - \sum_{i=1}^{m} a_i = s_{m+1+k} - s_m \geqslant 0.$$

152. На поверхности правильного тетраэдра с длиной ребер 1 конечное множество отрезков прямых можно выбрать так, что любые две вершины будут соединены ломаной, составленной из принадлежащих множеству отрезков, причем общая длина всех отрезков будет меньше $1+\sqrt{3}$.

Рассмотрим ромб $ABDC$, возникающий при развертке на плоскость двух граней заданного тетраэдра (рис. 103).

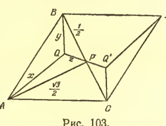


Рис. 103.

Тогда $AB = 1$ и $\angle BAC = 60°$. Пусть P — середина отрезка BC, а Q — точка треугольника ABP, из которой стороны AP и BP видны под углом 120°. Угол AQB также равен 120°. Пусть $x = AQ$, $y = BQ$, $z = PQ$. Поскольку $AP = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $BP = \frac{1}{2}$ и $\angle APB = 90°$, то приравняв площадь треугольника ABP сумме площадей треугольников AQB, BQP и PQA, получим $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}(xy + yz + zx)\sin 120°$, или

$$xy + yz + zx = \frac{1}{2}. \qquad (1)$$

Так как $\cos 120° = -\frac{1}{2}$, то по теореме косинусов для треугольников AQB, BQP и AQP выполняются со-

отношения

$$x^2+y^2+xy=1, \qquad (2)$$

$$y^2+z^2+yz=\frac{1}{4}, \qquad (3)$$

$$z^2+x^2+zx=\frac{3}{4}. \qquad (4)$$

Складывая отдельно левые и правые части соотношения (2), (3) и (4) и соотношения (1), обе части которого умножены на 3, получаем

$$2(x+y+z)^2=\frac{7}{2},$$

откуда

$$x+y+z=\frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Если точка Q' симметрична точке Q относительно точки P, то множество отрезков AQ, BQ, QP, PQ', CQ', DQ' обладает тем свойством, о котором говорится в условиях задачи, и сумма длин этих отрезков равна $\sqrt{7}$, а это число меньше $1+\sqrt{3}$.

153. Для любого $x\in[0, 1]$ справедливо тождество

$$(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)\times$$
$$\times(\sqrt{1-x^2}+1)=-2x^2.$$

Функция $h(x)=\frac{1}{2}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)(\sqrt{1-x^2}+1)$ на отрезке $[0, 1]$ удовлетворяет неравенству $0<h(x)\leqslant 4$, так как

$$0<\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2\leqslant\sqrt{1+x+\frac{x^2}{4}}+$$
$$+\sqrt{1-x+\frac{x^2}{4}}+2=\left(1+\frac{x}{2}\right)+\left(1-\frac{x}{2}\right)+2=4$$

и

$$0\leqslant\sqrt{1-x^2}\leqslant 1.$$

Следовательно, для $x\in[0, 1]$ выполняется неравенство

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2=\frac{-x^2}{h(x)}\leqslant-\frac{x^2}{4}.$$

Если бы при некотором числе α, удовлетворяющем неравенству $0 < \alpha < 2$, и числе $\beta > 0$ выполнялось бы аналогичное неравенство

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2 \leqslant -\frac{x^{\alpha}}{\beta} \quad (\text{при } x \in [0, 1]), \qquad (1)$$

или

$$-\frac{x^2}{h(x)} \leqslant -\frac{x^{\alpha}}{\beta},$$

то

$$x^{2-\alpha} \geqslant \frac{h(x)}{\beta} \quad (\text{при } x \in [0, 1]).$$

Переходя в обеих частях неравенства к пределу при $x \to 0$, получаем $0 \geqslant \frac{h(0)}{\beta}$, но $h(0) = 4$.

Полученное противоречие доказывает, что $\alpha = 2$ — наименьшее число, удовлетворяющее условию (1).

Наименьшее число β, для которого справедливо неравенство

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2 \leqslant -\frac{x^2}{\beta} \quad (\text{при } x \in [0, 1]), \qquad (2)$$

или

$$-\frac{x^2}{h(x)} \leqslant -\frac{x^2}{\beta},$$

равно наименьшему числу β, удовлетворяющему неравенству $h(x) \leqslant \beta$ (при $x \in [0, 1]$). Таким образом,

$$\beta = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} h(x).$$

Вычислим этот максимум. Из неравенства $2ab \leqslant \leqslant a^2 + b^2$ следует, что для любых вещественных неотрицательных чисел u, v справедливо неравенство

$$\sqrt{u} + \sqrt{v} \leqslant \sqrt{2(u+v)}. \qquad (3)$$

Действительно, $(\sqrt{u}+\sqrt{v})^2 = u + v + 2\sqrt{u}\sqrt{v} \leqslant \leqslant u + v + (\sqrt{u})^2 + (\sqrt{v})^2 = 2(u+v)$.

Подставляя в неравенство (3) $u = 1 + x$, $v = 1 - x$, получаем

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x} \leqslant 2,$$

в силу чего

$$h(x)=\frac{1}{2}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)(\sqrt{1-x^2}+1)\leqslant$$
$$\leqslant 2(\sqrt{1-x^2}+1)\leqslant 4$$

при $x\in[0,1]$[1]. С другой стороны, как показывают вычисления, $h(0)=4$. Следовательно, наибольшее значение, принимаемое функцией $h(x)$ на отрезке $[0,1]$, равно 4, поэтому и наименьшее положительное число β, удовлетворяющее условию (2), также равно 4.

154. Выполняя соответствующие перестановки цифр данного натурального числа, можно считать, что его четырьмя последними цифрами служат 1, 3, 7 и 9. Следовательно, натуральное число n, о котором говорится в условиях задачи, представимо в виде суммы числа 1379 и некоторого целого неотрицательного числа a, оканчивающегося четырьмя нулями. Докажем, что, выполнив соответствующую перестановку последних четырех цифр числа n, мы получим число n', делящееся на 7.

При делении на 7 числа

$$1379,\ 1793,\ 3719,\ 1739,\ 1397,\ 1937,\ 1973 \qquad (1)$$

дают остатки, равные 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Следовательно, если число a при делении на 7 дает остаток r, то прибавляя к числу a то из чисел (1), которое при делении на 7 дает остаток $7-r$, мы получим число n', делящееся на 7 и получающееся при перестановке цифр числа n.

155. Пусть окружность K с центром в точке O и радиусом r касается в точках P и Q сторон угла α с вершиной в точке A и B_0 — точка пересечения прямой AP и прямой m, параллельной AQ и отличной от AQ касательной к окружности K. Если точка B принадлежит лучу t прямой AP с началом в точке B_0, не проходящему через вершину A угла (рис. 104), то проведя из точки B касательную к окружности K, мы получим треугольник ABC, в который вписана окружность K.

[1] Это неравенство уже было установлено выше, в начале решения. — *Прим. ред.*

Заметим, что $\angle BAC = \alpha$. Угол ABC, равный β, в треугольнике ABC может принимать любые значения между 0 и $\pi - \alpha$.

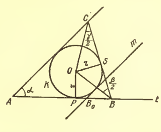


Рис. 104.

Пусть R — радиус описанной окружности треугольника ABC. По теореме синусов для треугольника ABC справедливо соотношение

$$\frac{BC}{\sin\alpha} = 2R.$$

Кроме того,

$$BC = BS + SC = r\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + r\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} =$$

$$= r\left(\frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} + \frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}\right) = r\,\frac{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}} =$$

$$= r\,\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\beta-\gamma}{2} - \cos\frac{\beta+\gamma}{2}\right)} = \frac{2r\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Поскольку $\cos x \leqslant 1$ при любом x, то из выписанных соотношений получаем

$$\frac{2R}{r} = \frac{BC}{2r\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\beta-\gamma}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}\left(1 - \sin\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Так как $\gamma = \pi - \alpha - \beta$, то $\frac{2R}{r} = f(\beta)$, где

$$f(\beta) = \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}\left[\cos\left(\beta + \frac{\alpha - \pi}{2}\right) - \sin\frac{\alpha}{2}\right]}.$$

Наоборот, докажем, что любое число, большее или равное

$$a = \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}\left(1 - \sin\frac{\alpha}{2}\right)},$$

совпадает со значением функции $f(\beta)$ при некотором $\beta \in (0, \pi - \alpha)$. Это будет означать, что для любого числа $a' \geqslant a$ существует такой угол $\beta \in (0, \pi - \alpha)$, а следовательно, и треугольник ABC, при котором выполняется соотношение $2R/r = a'$.

Действительно,

$$f\left(\frac{\pi - \alpha}{2}\right) = \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos 0 - \sin\frac{\alpha}{2}\right)} = a,$$

$$\lim_{\beta \to 0} \cos\left(\beta + \frac{\alpha - \pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Следовательно,

$$\lim_{\substack{\beta \to 0 \\ \beta > 0}} f(\beta) = \infty.$$

Функция $f(\beta)$ непрерывна на любом отрезке $[p, q] \subset (0, \pi - \alpha)$, а каждая функция, непрерывная на отрезке, принимает все значения, заключенные между ее значениями на концах отрезка. Рассматривая отрезки вида $\left[\varepsilon, \frac{\pi - \alpha}{2}\right]$, где $0 < \varepsilon < \frac{\pi - \alpha}{2}$, мы убеждаемся в том, что в интервале $(0, \pi - \alpha)$ функция $f(\beta)$ принимает все значения от a до ∞.

156. Докажем следующую теорему.

Теорема. *Любое рациональное число* $\frac{m}{n}$, *принадлежащее интервалу* $(0, 1)$, *где* m — *нечетное число, а* n — *степень двойки, равно* $f\left(\frac{1}{2}\right)$, *где* f — *некоторая функция вида*

$$f = g_1 \circ g_2 \circ \ldots \circ g_k. \qquad (1)$$

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции по числу $m+n$. Из определений чисел m и n следует, что $m+n \geqslant 3$. Если $m+n=3$, то $m=1$, $n=2$ и тогда $S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$. Таким образом, достаточно считать, что $f=S$.

Предположим, что $m+n>3$ и для любых двух натуральных чисел m' и n', где m' — нечетное число, n' — степень двойки, $0<m'/n'<1$ и $m'+n'<m+n$, существует такая функция f' вида (1), для которой $f'(1/2)=m'/n'$.

Если $m/n<1/2$, то $0<m/{}^1/_2n<1$ и число ${}^1/_2n$ есть степень двойки. Применяя к числам $m'=m$ и $n'={}^1/_2n$ предположение индукции, мы заключаем, что существует такая функция f' вида (1), для которой $f'(1/2)=m'/n'$. Тогда функцию f достаточно выбрать в виде $f=T\circ f'$. Действительно,

$$(T\circ f')\left(\frac{1}{2}\right)=T\left(f'\left(\frac{1}{2}\right)\right)=T\left(\frac{m'}{n'}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{m'}{n'}=\frac{m}{n}.$$

Если $1/2<m/n<1$, то $0<1-m/n<1/2$. Но $1-m/n=(n-m)/n$, причем число $n-m$ нечетно, а n — степень двойки. Кроме того, $n-m+n<m+n$, так как $m/n>1/2$. Применяя к числам $m'=n-m$ и $n'=n$ предположение индукции, заключаем, что существует функция f' вида (1), значение которой при $x=1/2$ равно $(n-m)/n$: $f'(1/2)=(n-m)/n$. Поскольку

$$(S\circ f')\left(\frac{1}{2}\right)=S\left(f'\left(\frac{1}{2}\right)\right)=S\left(\frac{n-m}{n}\right)=1-\frac{n-m}{n}=\frac{m}{n},$$

то функцию f достаточно выбрать в виде суперпозиции функций $S\circ f'$.

Итак, по принципу математической индукции доказанное утверждение справедливо для любого рационального числа m/n, где m — нечетное число, а n — степень двойки.

В частности, повторив приведенные выше рассуждения для числа $\frac{1975}{2^{1975}}$, получим $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1975}{2^{1975}}$, где $f=T^{1964}\circ S\circ T^4\circ S\circ T\circ S\circ T^2\circ S\circ T\circ S\circ T^2$, а T^k означает k-кратную суперпозицию функции T.

157. Трижды применив формулу синуса двойного угла $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, получим

$$\sin\frac{8\pi}{18} = 2\sin\frac{4\pi}{18}\cos\frac{4\pi}{18} = 4\sin\frac{2\pi}{18}\cos\frac{2\pi}{18}\cos\frac{4\pi}{18} =$$
$$= 8\sin\frac{\pi}{18}\cos\frac{\pi}{18}\cos\frac{2\pi}{18}\cos\frac{4\pi}{18}.$$

Заменяя косинусы синусами дополнительных углов $\left(\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right)$, преобразуем полученное тождество к виду

$$\sin\frac{8\pi}{18} = 8\sin\frac{\pi}{18}\sin\frac{8\pi}{18}\sin\frac{7\pi}{18}\sin\frac{5\pi}{18}.$$

Итак,

$$\sin\frac{\pi}{18}\sin\frac{5\pi}{18}\sin\frac{7\pi}{18} = \frac{1}{8}. \qquad (1)$$

Но $\sin\frac{3\pi}{18} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\sin\frac{9\pi}{18} = \sin\frac{\pi}{2} = 1$, поэтому из тождества (1) получаем

$$\sin\frac{\pi}{18}\sin\frac{3\pi}{18}\sin\frac{5\pi}{18}\sin\frac{7\pi}{18}\sin\frac{9\pi}{18} = \frac{1}{16}.$$

Следовательно, число, о котором говорится в задаче, рационально.

158. I решение. Из условий задачи видно, что последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$, начиная с некоторого члена, становятся периодическими, в силу чего последовательности $A_n = a_n + b_n + c_n + d_n$ и $B_n = a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2$ с некоторого члена также становятся периодическими. Кроме того,

$$A_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} + d_{n+1} =$$
$$= (a_n + b_n) + (b_n + c_n) + (c_n + d_n) + (d_n + a_n) =$$
$$= 2(a_n + b_n + c_n + d_n) = 2A_n.$$

Пользуясь этим соотношением, нетрудно вывести, что $A_{n+1} = 2^n A_1$ при любом $n \geqslant 0$.

Поскольку геометрическая прогрессия $\{2^n\}$ неограниченно возрастает, а последовательность $\{A_n\}$, начиная с некоторого члена, становится периодической, то $A_1 = 0$ и, следовательно, $A_n = 0$ для любого натурального числа n.

Нетрудно видеть, что $a_{n+1}+c_{n+1}=(a_n+b_n)+(c_n+d_n)=A_n=0$, поэтому

$$B_{n+2}=a_{n+2}^2+b_{n+2}^2+c_{n+2}^2+d_{n+2}^2=$$
$$=(a_{n+1}+b_{n+1})^2+(b_{n+1}+c_{n+1})^2+(c_{n+2}+d_{n+1})^2+$$
$$+(d_{n+1}+a_{n+1})^2=2(a_{n+1}^2+b_{n+1}^2+c_{n+1}^2+d_{n+1}^2)+$$
$$+2(a_{n+1}+c_{n+1})(b_{n+1}+d_{n+1})=$$
$$=2(a_{n+1}^2+b_{n+1}^2+c_{n+1}^2+d_{n+1}^2)=2B_{n+1}$$

при $n=1, 2, \ldots$, откуда $B_{n+2}=2^nB_2$ для $n\geqslant 1$.

Как и при рассмотрении последовательности $\{A_n\}$, из периодичности последовательности $\{B_n\}$ мы заключаем, что $B_2=0$, или $a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2=0$. Поскольку a_2, b_2, c_2, d_2 — вещественные числа, то последнее равенство означает, что $a_2=b_2=c_2=d_2=0$.

II решение. Рассмотрим последовательность многочленов $F_n(x)$, заданных выражением

$$F_n(x)=a_n+b_nx+c_nx^2+d_nx^3. \qquad (1)$$

Поскольку из условий задачи мы заключаем, что последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$, начиная с некоторого члена, становятся периодическими, то и последовательность многочленов $\{F_n(x)\}$ также периодична, начиная с некоторого n. Кроме того, многочлены F удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$F_{n+1}(x)=a_{n+1}+b_{n+1}x+c_{n+1}x^2+d_{n+1}x^3=$$
$$=(a_n+b_n)+(b_n+c_n)x+(c_n+d_n)x^2+(d_n+a_n)x^3=$$
$$=(a_n+b_nx+c_nx^2+d_nx^3)+(b_n+c_nx+d_nx^2+a_nx^3)=$$
$$=F_n(x)+\frac{1}{x}F_n(x)+\frac{1}{x}(x^4-1)a_n.$$

Подставляя $x=-1$, получаем $F_{n+1}(-1)=0$, а при x, равном 1, i и $-i$,

$$F_{n+1}(1)=2F_n(1),\quad F_{n+1}(i)=(1-i)F_n(i),$$
$$F_{n+1}(-i)=(1+i)F_n(-i).$$

Переходя ко все меньшим значениям n, получаем

$$F_n(1)=2^{n-1}F_1(1),\quad F_n(i)=(1-i)^{n-1}F_1(i),$$
$$F_n(-i)=(1+i)^{n-1}F_1(i), \qquad (2)$$

где $n=1, 2, \ldots$.

Поскольку каждая из числовых последовательностей $\{F_n(1)\}$, $\{F_n(i)\}$, $\{F_n(-i)\}$, начиная с некоторого n, становится периодической, а геометрические прогрессии $\{2^{n-1}\}$, $\{|1-i|^{n-1}\}$, $\{|1+i|^{n-1}\}$ неограниченно возрастают, то из соотношений (2) следует, что $F_1(1) = F_1(i) = F_1(-i) = 0$. Но тогда $F_n(1) = F_n(i) = F_n(-i) = 0$ при любом натуральном n в силу соотношений (2).

В частности, $F_2(-1) = F_2(1) = F_2(i) = F_2(-i) = 0$ или

$$a_2 - b_2 + c_2 - d_2 = 0,$$
$$a_2 + b_2 + c_2 + d_2 = 0,$$
$$a_2 + ib_2 - c_2 - id_2 = 0,$$
$$a_2 - ib_2 - c_2 - id_2 = 0.$$

Складывая отдельно левые и правые части всех четырех равенств, получаем $a_2 = 0$. Складывая отдельно левые и правые части двух первых равенств, находим, что $c_2 = 0$. Наконец, из второго и третьего равенств следует, что $b_2 = d_2 = 0$.

Примечание 1. Из условий задачи и приведенного выше решения следует, что $a_n = b_n = c_n = d_n = 0$ при $n \geqslant 2$, но числа a_1, b_1, c_1, d_1 могут быть отличны от нуля. Действительно, достаточно выбрать $a_1 = c_1 = t$, $b_1 = d_1 = -t$, где t — любое число, и условия задачи будут выполнены.

Примечание 2. Задачу можно обобщить и рассматривать m периодических числовых последовательностей $\{a_n^{(k)}\}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, удовлетворяющих условиям

$$a_{n+1}^{(1)} = a_n^{(1)} + a_n^{(2)},\ a_{n+1}^{(2)} = a_n^{(2)} + a_n^{(3)},\ \ldots,$$
$$a_{n+1}^{(m-1)} = a_n^{(m-1)} + a_n^{(m)},\ a_{n+1}^{(m)} = a_n^{(m)} + a_n^{(1)}.$$

Если m не делится на 3, то, рассуждая по аналогии с приведенным выше решением, можно доказать, что

1) при нечетном m первые члены последовательностей $\{a_n^{(k)}\}$ равны нулю;

2) при четном m вторые члены последовательностей $\{a_n^{(k)}\}$ равны нулю.

Совершенно иначе обстоит дело при m, делящемся на 3: в этом случае существуют числовые последовательности $\{a_n^{(k)}\}$ с ненулевыми членами, удовлетворяющие условиям обобщенной задачи.

Пусть, например, $m = 3$. Рассмотрим три периодические последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ (с периодом 6), такие, что

$$a_{n+1} = a_n + b_n, \quad b_{n+1} = b_n + c_n, \quad c_{n+1} = c_n + a_n. \qquad (3)$$

Пусть u и v — произвольные числа. Первые 6 членов каждой из последовательностей $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ приведены в таблице:

a_n	u,	v,	$v-u$,	$-u$,	$-v$,	$u-v$
b_n	$v-u$,	$-u$,	$-v$,	$u-v$,	u,	v
c_n	$-v$,	$u-v$,	u,	v,	$v-u$,	$-u$

Нетрудно видеть, что условие (3) выполнено. Придав параметрам u и v надлежащие значения (например, положив $u = 1$, $v = 2$), получим последовательности, все члены которых отличны от нуля.

159. Пусть $ABCD$ — данный тетраэдр. Выберем на лучах AB, AC и AD такие точки B', C' и D', что

$$AB' = AC \cdot AD, \quad AC' = AB \cdot AD, \quad AD' = AB \cdot AC \qquad (1)$$

(рис. 105). Докажем, что треугольник $B'C'D'$ удовлетворяет условиям задачи.

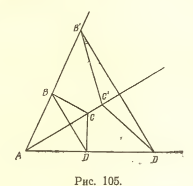


Рис. 105.

Прежде всего из соотношений (1) следует, что

$$\frac{AB'}{AC'} = \frac{AC}{AB},$$

поэтому треугольники ABC и $AC'B'$, имеющие общий угол BAC, подобны. Пользуясь соотношением (1), пре-

образуем равенство отношений сходственных сторон

$$\frac{BC}{C'B'} = \frac{AB}{AC'}$$

к виду

$$B'C' = \frac{BC}{AB} \cdot AC' = BC \cdot AD.$$

Полученное соотношение означает, что длина стороны $B'C'$ треугольника $B'C'D'$ равна произведению длин скрещивающихся ребер BC и AD тетраэдра $ABCD$.

Рассматривая подобные треугольники ACD и $AD'C'$, ABD и $AD'B'$, получаем $C'D' = CD \cdot AB$, $B'D' = BD \cdot AC$. Следовательно, треугольник $B'C'D'$ удовлетворяет условиям задачи.

Примечание. Приведенное выше решение остается в силе и в том случае, если тетраэдр $ABCD$ вырождается в плоский четырехугольник $ABCD$ (точки B', C', D' могут располагаться на одной прямой). Пользуясь им, можно доказать, что в любом плоском четырехугольнике произведение диагоналей не превышает суммы произведений противоположных сторон. Подробное доказательство этого утверждения мы предоставляем читателю в качестве самостоятельного упражнения.

160. Пусть $ABCD$ и $A'B'C'D'$ — плоские четырехугольники с последовательными сторонами длиной a, b, c, d, то есть пусть

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{BC}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{CD}, \quad \vec{d} = \overrightarrow{DA},$$
$$\vec{a}' = \overrightarrow{A'B'}, \quad \vec{b}' = \overrightarrow{B'C'}, \quad \vec{c}' = \overrightarrow{C'D'}, \quad \vec{d}' = \overrightarrow{D'A'},$$

причем

$$\vec{a}^2 = \vec{a}'^2 = a^2, \quad \vec{b}^2 = \vec{b}'^2 = b^2,$$
$$\vec{c}^2 = \vec{c}'^2 = c^2, \quad \vec{d}^2 = \vec{d}'^2 = d^2.$$

Кроме того, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = 0$ и $\vec{a}' + \vec{b}' + \vec{c}' + \vec{d}' = 0$. Пользуясь этими соотношениями, вычислим $\vec{d}^2$:

$$d^2 = \vec{d}^2 = (-\vec{d})^2 = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 =$$
$$= 2\vec{a}\vec{b} + 2\vec{a}\vec{c} + 2\vec{b}\vec{c} + \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 =$$
$$= \vec{a}^2 - \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2(\vec{a} + \vec{b})(\vec{b} + \vec{c}) =$$
$$= a^2 - b^2 + c^2 + 2(\vec{a} + \vec{b})(\vec{b} + \vec{c}),$$

откуда

$$(\vec{a}+\vec{b})(\vec{b}+\vec{c})=\frac{1}{2}(b^2+d^2-a^2-c^2). \qquad (1)$$

Аналогичным образом можно доказать, что

$$(\vec{a}'+\vec{b}')(\vec{b}'+\vec{c}')=\frac{1}{2}(b^2+d^2-a^2-c^2). \qquad (2)$$

Векторы $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ и $\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BD}$ — диагонали четырехугольника $ABCD$, а векторы $\vec{a}'+\vec{b}'=\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'C'}=\overrightarrow{A'C'}$ и $\vec{b}'+\vec{c}'=\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{C'D'}=\overrightarrow{B'D'}$ — диагонали четырехугольника $A'B'C'D'$. Таким образом, из соотношений (1) и (2) следует, что скалярное произведение векторов, совпадающих с диагоналями четырехугольника $ABCD$, равно скалярному произведению векторов, совпадающих с диагоналями четырехугольника $A'B'C'D'$. Поскольку скалярное произведение векторов равно нулю в том и только в том случае, если векторы ортогональны, то тем самым утверждение задачи доказано.

Примечание. В приведениом выше решеннн осталось неиспользованным предположение о том, что точки A, B, C, D, а также точки A', B', C', D' лежат в одиой плоскости.

161. Вероятность того, что судно не будет задержано пограничной охраной при первом забросе сетей, равна $1-\frac{1}{k}$. Поскольку события, состоящие в задержании или незадержании судна при очередном забросе сетей, независимы, то вероятность того, что судно не будет задержано при n забросах сетей, равна $\left(1-\frac{1}{k}\right)^n$. Следовательно, ожидаемая прибыль от n забросов сетей равна

$$f(n)=wn\left(1-\frac{1}{k}\right)^n, \qquad (1)$$

где w — прибыль, извлекаемая от одного заброса сетей.

Задача сводится к тому, чтобы определить, при каком натуральном числе n функция $f(n)$ достигает максимального значения.

Из явного вида (1) функции $f(n)$ следует, что

$$f(n+1) = w(n+1)\left(1-\frac{1}{k}\right)^{n+1} =$$
$$= wn\left(1-\frac{1}{k}\right)^{n}\cdot\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right) =$$
$$= f(n)\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) = f(n)\left(1+\frac{(k-1)-n}{kn}\right).$$

Поскольку неравенство $1+\frac{(k-1)-n}{kn} \geqslant 1$ равносильно неравенству $(k-1)-n \geqslant 0$, или $n \leqslant k-1$, то

$$f(n+1) > f(n) \quad \text{при} \quad n = 1, 2, \ldots, k-2,$$
$$f(n+1) = f(n) \quad \text{при} \quad n = k-1,$$
$$f(n+1) < f(n) \quad \text{при} \quad n = k, k+1, \ldots .$$

Таким образом, своего наибольшего значения функция f достигает дважды: при $n = k-1$ и $n = k$.

162. Пользуясь формулой $f(kl) = f(k) + f(l)$, нетрудно доказать, что

$$f(m^s) = sf(m) \tag{1}$$

при любых натуральных числах m и s. Из соотношения (1), в частности, следует, что $f(1) = f(1^2) = 2f(1)$, или $f(1) = 0$, а поскольку f — возрастающая функция, то $f(2) > f(1) = 0$.

Пусть p — число, заданное соотношением $\log_p 2 = f(2)$, то есть $p^{f(2)} = 2$, или $p = \sqrt[f(2)]{2}$. Следовательно, $p > 1$.

Для любого натурального числа $n \geqslant 2$ существует такое натуральное число r, что

$$2^r \leqslant n < 2^{r+1}. \tag{2}$$

Логарифмируя неравенство (2) по основанию p, получаем

$$r\log_p 2 \leqslant \log_p n \leqslant (r+1)\log_p 2,$$

или

$$rf(2) \leqslant \log_p n \leqslant rf(2) + f(2). \tag{3}$$

Так как f — возрастающая функция, то из неравенства (2) следует, что

$$f(2^r) \leqslant f(n) < f(2^{r+1}).$$

Соотношение (1) позволяет преобразовать полученное равенство к виду

$$rf(2) \leqslant f(n) < (r+1) f(2) = rf(2) + f(2). \qquad (4)$$

Неравенства (3) и (4) означают, что числа $\log_p n$ и $f(n)$ принадлежат одному и тому же отрезку длиной $f(2)$, поэтому

$$-f(2) < f(n) - \log_p n < f(2) \qquad (5)$$

при любом натуральном $n \geqslant 2$. В частности, подставляя в неравенство (5) вместо n число n^k, где $n \geqslant 2$, а k — любое натуральное число, и используя соотношение (1), получаем

$$-f(2) < kf(n) - k\log_p n < f(2),$$

или

$$-\frac{f(2)}{k} < f(n) - \log_p n < \frac{f(2)}{k} \qquad (6)$$

при $k = 1, 2, \ldots$. Переходя в неравенстве (6) к пределу при $k \to \infty$, заключаем, что $f(n) = \log_p n$ при $n \geqslant 2$. Это же соотношение выполняется и при $n = 1$: $f(1) = 0 = \log_p 1$.

Примечаиие. В приведеииом выше решенин мы нигде ие использовали предположенне о том, что n — натуральиое чнсло. Следовательно, соображення, аналогнчные прнведеиным выше, позволяют доказать, что любую возрастающую функцию f, удовлетворяющую условию $f(kl) = f(k) + f(l)$ н заданную на множестве вещественных положительных чисел, можио представнть в вндe

$$f(x) = \log_p x,$$

где $p > 1$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В этот раздел включены некоторые задачи, предлагавшиеся на двух первых турах олимпиад 1970—1976 гг.

ЗАДАЧИ

1. Через точку P, лежащую в плоскости треугольника ABC, проведены 3 прямые, перпендикулярные соответственно прямым BC, AC и прямой, содержащей медиану CE.

Доказать, что эти прямые пересекают прямую, содержащую высоту CD, в точках K, L, M, которые служат концами равных отрезков: $KM = LM$.

2. Найти цифры a, b, c, для которых при любом натуральном n выполняется равенство

$$\overline{\underbrace{aa\ldots a}_{n}\underbrace{bb\ldots b}_{n}} + 1 = (\overline{\underbrace{cc\ldots c}_{n}} + 1)^2.$$

(Запись $\overline{a_1a_2\ldots a_k}$ означает число, у которого (в десятичной системе счисления) число единиц равно a_k, число десятков — a_{k-1}, число сотен — a_{k-2} и так далее.)

3. Доказать, что в любом выпуклом многограннике имеется либо треугольная грань, либо трехгранный угол.

4. Даны 6 прямых в пространстве, из которых никакие 3 не параллельны, никакие 3 не проходят через одну и ту же точку и никакие 3 не лежат в одной плоскости.

Доказать, что из этих 6 прямых всегда можно выбрать 3 прямые, из которых любые 2 скрещивающиеся.

5. Дана бесконечная последовательность $\{a_n\}$. Доказать, что если

$$a_n + a_{n+2} \geqslant 2a_{n+1} \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots),$$

то

$$\frac{a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1}}{n+1} \geqslant \frac{a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}}{n}$$

$(n = 1,\ 2,\ \ldots)$.

6. Все цифры a десятичной записи числа $\frac{n(n+1)}{2}$ при некоторых натуральных n одинаковы.

При каких a это возможно?

7. Ломаная, заключенная в квадрат со стороной 50, обладает тем свойством, что расстояние от любой точки квадрата до нее меньше 1.

Доказать, что длина ломаной больше 1248.

8. В прямоугольнике со сторонами 20 и 25 находятся 120 квадратов со сторонами, равными 1.

Доказать, что в этом прямоугольнике существует круг единичного диаметра, не имеющий общих точек ни с одним из 120 квадратов.

9. Куб с ребром n разделен плоскостями, параллельными его граням на n^3 единичных кубов.

Сколько существует пар единичных кубов, имеющих не более двух общих вершин?

10. Доказать, что во вписанном в окружность выпуклом четырехугольнике прямые, проведенные через середины сторон перпендикулярно противоположным сторонам, пересекаются в одной точке.

11. Доказать, что из 25 различных положительных чисел всегда можно выбрать два числа, сумма и разность которых не совпадает ни с одним из остальных 23 чисел.

12. Найти наименьшее натуральное число $n > 1$, обладающее следующим свойством: существует множество Z, состоящее из n точек плоскости, таких, что лю-

бая прямая AB $(A,\ B \in Z)$ параллельна некоторой другой прямой CD $(C,\ D \in Z)$.

13. Доказать, что если центр описанной сферы тетраэдра совпадает с центром вписанной сферы, то грани этого тетраэдра конгруэнтны.

14. Доказать, что если положительные числа x, y, z удовлетворяют неравенству

$$\frac{x^2+y^2-z^2}{2xy}+\frac{y^2+z^2-x^2}{2yz}+\frac{z^2+x^2-y^2}{2xz}>1,$$

то они совпадают с длинами сторон некоторого треугольника.

15. Доказать, что для любого неотрицательного целого числа m существует такой многочлен w с целочисленными коэффициентами, для которого 2^m является наибольшим общим делителем чисел $a_n = 3^n + w(n)$ при $n = 0, 1, 2, \ldots$.

16. Кипу документов разделили на n частей и раздали на сохранение n лицам, у каждого из которых имеется телефон.

Доказать, что при $n \geqslant 4$ достаточно $2n-4$ телефонных разговоров, чтобы по окончании их все n лиц ознакомились с содержанием всех документов.

17. Каждая диагональ некоторого выпуклого пятиугольника отсекает от него треугольник единичной площади.

Вычислить площадь этого пятиугольника.

18. Через вершину трехгранного угла с не более чем одним прямым плоским углом проведены три прямые, каждая из которых перпендикулярна одному из ребер трехгранного угла и лежит в плоскости грани, не содержащей этого ребра.

Доказать, что все 3 проведенные прямые лежат в одной плоскости.

19. Доказать, что ортогональные проекции вершины D тетраэдра $ABCD$ на плоскости, делящие пополам

внутренние и внешние двугранные углы при ребрах AB, BC и CA, лежат в одной плоскости.

20. Каждая из сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$ площади S разделена на 3 равные части. Соответственные точки деления противоположных сторон соединены отрезками прямых так, что четырехугольник оказался разделенным на 9 четырехугольников.

Доказать, что сумма площадей трех из этих четырехугольников — четырехугольника, содержащего вершину A, среднего четырехугольника и четырехугольника, содержащего вершину C, — равна $S/3$.

21. На балу присутствовали 42 особы. Дама A_1 танцевала с 7 кавалерами, дама A_2 — с 8 кавалерами, ..., дама A_n — со всеми кавалерами.

Сколько дам и кавалеров было на балу?

22. Дан остроугольный треугольник ABC. На его сторонах вне его построены два равносторонних треугольника ABC' и ACB'. Пусть K и L — середины сторон AC' и $B'C$, а M — такая точка на стороне BC, что $BM = 3MC$.

Доказать, что углы треугольника KLM равны 90°, 60°, 30°.

23. В пространстве заданы куб с ребром a и шары $B_1, B_2, \ldots, B_n$ произвольных радиусов, такие, что каждая точка куба принадлежит одному из шаров.

Доказать, что из n заданных шаров можно выбрать попарно не пересекающиеся, сумма объемов которых не меньше $\left(\frac{a}{5}\right)^3$.

24. Пусть в некоторый выпуклый многогранник можно вписать сферу, а его грани можно раскрасить в один из двух цветов так, что любые 2 из них, имеющие общее ребро, будут окрашены в различные цвета.

Доказать, что грани одного цвета имеют такую же площадь, как и грани другого цвета.

25. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены с целочисленными коэффициентами.

Доказать, что если при любом целом n число $f(n)$ делится на число $g(n)$, то $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, где $h(x)$ — многочлен. Привести пример, показывающий, что коэффициенты многочлена $h(x)$ не обязательно должны быть целочисленными.

26. Самолет совершает беспосадочный перелет по кратчайшему маршруту из Осло в город X, расположенный на экваторе в Южной Америке. Из Осло самолет вылетел, держа курс на запад. Географические координаты Осло известны: 59°55′ северной широты и 10°43′ восточной долготы.

Вычислить географические координаты города X. Что это за город? Вычислить с точностью до 100 км расстояние, преодоленное самолетом на пути из Осло в X.

Предполагается, что Земля имеет форму идеального шара с длиной экватора 40 000 км, а перелет происходит на высоте не более 10 км.

27. Точки A', B', C', D' плоскости Q — образы точек A, B, C, D плоскости P при параллельной проекции, причем все точки A, B, C, D, A', B', C', D' различны и никакие 3 из них не лежат на одной прямой.

Доказать, что тетраэдры $ABCD'$ и $A'B'C'D$ имеют равные объемы.

28. Рассмотрим сферический сегмент, не содержащий ни одной окружности большого круга. Расстояние между точками A и B такого сегмента определим как длину дуги той части окружности большого круга, которая содержится в рассматриваемом сегменте.

Доказать, что не существует изометрии, отображающей такой сегмент на какое-нибудь подмножество плоскости.

(Сферическим сегментом называется любая из двух частей, на которые делит поверхность сферы секущая плоскость.)

29. Внутри окружности S размещены окружность T и окружности K_1, K_2, ..., K_n, касающиеся извне окружности T и изнутри окружности S, причем окружность K_1 касается окружности K_2, окружность K_2 — окружности K_3, ..., окружность K_n — окружности K_1.

Доказать, что точки касания окружностей K_1 и K_2, K_2 и K_3 и так далее лежат на одной окружности.

30. Шесть точек расположены на плоскости так, что любые 3 из них служат вершинами треугольника со сторонами различной длины.

Доказать, что наименьшая сторона одного из треугольников одновременно является наибольшей стороной другого треугольника.

РЕШЕНИЯ

1. Докажем сначала несколько вспомогательных фактов.

Лемма. *Если соответственные стороны двух треугольников параллельны, то треугольники подобны.*

Доказательство. Пусть $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$, $CA \parallel C'A'$. Тогда стороны соответственных углов треугольника ABC параллельны. Следовательно, соответственные углы либо равны, либо в сумме составляют развернутый угол:

$$\angle A = \angle A' \quad \text{или} \quad \angle A + \angle A' = 180°,$$
$$\angle B = \angle B' \quad \text{или} \quad \angle B + \angle B' = 180°,$$
$$\angle C = \angle C' \quad \text{или} \quad \angle C + \angle C' = 180°.$$

Если бы по крайней мере в двух случаях сумма соответственных углов была равна 180°, например $\angle A + \angle A' = 180°$ и $\angle B + \angle B' = 180°$, то, поскольку сумма внутренних углов треугольника равна 180°, выполнялось бы соотношение

$$\angle A + \angle A' + \angle B + \angle B' = 360° =$$
$$= \angle A + \angle B + \angle C + \angle A' + \angle B' + \angle C'$$

и

$$\angle C + \angle C' = 0°,$$

что невозможно.

Следовательно, по крайней мере в двух случаях соответственные углы равны, например $\angle A = \angle A'$ и $\angle B = \angle B'$. Отсюда следует, что треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны.

Следствие. *Если соответственные стороны двух треугольников взаимно перпендикулярны, то эти треугольники подобны.*

Доказательство. Пусть

$$AB \perp A_1B_1, \quad BC \perp B_1C_1, \quad CA \perp C_1A_1. \qquad (1)$$

Повернув треугольник $A_1B_1C_1$ вокруг любой точки на прямой угол, получим треугольник $A'B'C'$, стороны которого перпендикулярны соответственным сторонам треугольника $A_1B_1C_1$, то есть

$$A_1B_1 \perp A'B', \quad B_1C_1 \perp B'C', \quad C_1A_1 \perp C'A'. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$, $CA \parallel C'A'$. По доказанной выше лемме это означает, что

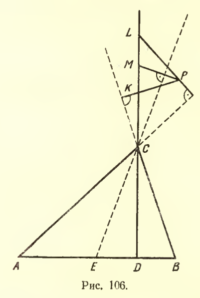


Рис. 106.

треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны. Но треугольники $A'B'C'$ и $A_1B_1C_1$ конгруэнтны, поэтому треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ также подобны.

Переходим к решению задачи.

Если точка P лежит на прямой, содержащей отрезок CD, то $P = K = L = M$ и поэтому $KM = LM = 0$.

Если точка P не лежит на прямой, содержащей отрезок CD, то из условий задачи мы заключаем, что соответственные стороны треугольников PKM и CBE, PLM и CAE взаимно перпендикулярны (рис. 106). По

доказанному выше следствию из леммы треугольники PKM и CBE, PLM и CAE подобны.

Пусть λ и μ — отношения соответственных сторон треугольников PKM и CBE, PLM и CAE. Тогда $PM = \lambda CE$, $KM = \lambda BE$, $PM = \mu CE$, $LM = \mu AE$. Сравнивая первое из этих равенств с третьим, получаем $\lambda = \mu$. Точка E — середина отрезка AB, то есть $AE = BE$, поэтому из второго и четвертого равенств следует, что $KM = LM$.

2. Пусть $p_n = \overline{\underbrace{11\ldots1}_{n}}$, тогда $p_n = 10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots$ $\ldots + 10 + 1 = \frac{10^n - 1}{9}$ и $10^n = 9p_n + 1$. Числа $\overline{\underbrace{aa\ldots a}_{n}\,\underbrace{bb\ldots b}_{n}}$ и $(\overline{\underbrace{cc\ldots c}_{n}} + 1)^2$ можно выразить через p_n следующим образом:

$$\overline{\underbrace{aa\ldots a}_{n}\,\underbrace{bb\ldots b}_{n}} = \overline{\underbrace{aa\ldots a}_{n}} \cdot 10^n + \overline{\underbrace{bb\ldots b}_{n}} =$$

$$= ap_n 10^n + bp_n = ap_n(9p_n + 1) + bp_n,$$

$$(\overline{\underbrace{cc\ldots c}_{n}} + 1)^2 = (cp_n + 1)^2 = c^2p_n^2 + 2cp_n + 1.$$

Таким образом, равенство, приведенное в условиях задачи, в новых обозначениях имеет вид

$$9ap_n^2 + (a+b)p_n + 1 = c^2p_n^2 + 9cp_n + 1,$$

или

$$9ap_n + (a+b) = c^2p_n + 2c. \qquad (1)$$

Воспользуемся следующей теоремой: *если значения двух многочленов $f(x)$ и $g(x)$ совпадают при бесконечно многих значениях аргумента x, то коэффициенты при одинаковых степенях x этих многочленов равны.*

В рассматриваемом случае значения многочленов $f(x) = 9ax + (a+b)$ и $g(x) = c^2x + 2c$ совпадают при $x = p_n$, где $n = 1, 2, \ldots$. Следовательно, по сформулированной выше теореме коэффициенты многочленов $f(x)$ и $g(x)$ при одинаковых степенях x равны, то есть

$$9a = c^2 \quad \text{и} \quad a + b = 2c. \qquad (2)$$

Наоборот, если числа a, b, c удовлетворяют условиям (2), то, очевидно, при любом натуральном n выполняется соотношение (1). Таким образом, достаточно найти все цифры a, b, c, для которых справедливы соотношения (2). Из уравнения $9a = c^2$ следует, что c делится на 3, то есть цифрой c могут быть 0, 3, 6 и 9. Вычислить соответствующие значения a и b в каждом из трех случаев нетрудно. Система двух уравнений (2) допускает следующие решения: (0, 0, 0), (1, 5, 3), (4, 8, 6) и (9, 9, 9).

Примечание 1. Предположение о том, что соотношение (1) выполняется при любом натуральном n, позволяет по-другому вывести систему уравнений (2). Разделив правую и левую части соотношения (1) на p_n и перейдя к пределу при $n \to \infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \infty$), получим

$$\lim_{n\to\infty}\left(9a + \frac{a+b}{p_n}\right) = 9n + 0 = 9a$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\left(c^2 + \frac{2c}{p_n}\right) = c^2 + 0 = c^2.$$

Таким образом, $9a = c^2$. Из этого равенства и исходного соотношения (1) следует, что $a + b = 2c$.

Примечание 2. Аналогичная задача допускает решение и в случае системы счисления с любым основанием $g \geqslant 2$.

После преобразований, аналогичных тем, которые приведены в решении задачи, получаем соотношение

$$(g-1)\,ap_n + (a+b) = c^2p_n + 2c, \qquad (1')$$

выполняющееся при любом натуральном числе n. Как и выше, доказываем, что оно равносильно системе уравнений

$$(g-1)\,a = c^2 \quad \text{и} \quad a + b = 2c. \qquad (2')$$

Найдем все цифры a, b, c, удовлетворяющие в системе счисления с основанием g системе уравнений (2′). Пусть t^2 — наибольший натуральный квадрат, на который делится число $g-1$. Тогда $g - 1 = t^2s$, где s — число, не содержащее квадратов, то есть не имеющее делителей, равных квадрату натурального числа больше 1. Из первого уравнения (2′) следует, что c делится на ts, то есть $c = tsu$, где u — некоторое целое число. Из

того же уравнения получаем, что $a = su^2$. Наконец, второе из уравнений (2′) приводит к соотношению $b = su(2t - u)$.

Итак, все решения системы уравнений (2′) в целых числах определяются выражениями

$$\begin{aligned} a &= su^2, \\ b &= su(2t - u), \\ c &= tsu, \end{aligned} \tag{3′}$$

где u — любое целое число.

Но в нашей обобщенной задаче a, b, c — цифры в системе счисления с основанием g, то есть они удовлетворяют неравенству $0 \leqslant a,\ b,\ c \leqslant g - 1 = t^2 s$. Неравенство $0 \leqslant c \leqslant g - 1$ можно записать в виде $0 \leqslant tsu \leqslant t^2 s$, что равносильно неравенству $0 \leqslant u \leqslant t$. Наоборот, если $0 \leqslant u \leqslant t$, то $0 \leqslant a = su^2 \leqslant st^2 = g - 1$ и $0 \leqslant b = su(2t - u) = s(2tu - u^2) = s(t^2 - (t - u)^2) \leqslant st^2 = g - 1$. Таким образом, все решения задачи содержатся в выражениях (3′), где $g - 1 = t^2 s$ и $0 \leqslant u \leqslant t$.

В частности, при $u = 0$ получаем решение $a = b = c = 0$, а при $u = t$ — решение $a = b = c = g - 1$.

3. Предположим, что существует выпуклый многогранник W, не имеющий ни треугольной грани, ни трехгранного угла. Пусть w — число вершин, k — число ребер, а s — число граней такого многогранника, и пусть φ — сумма всех плоских углов при его вершинах. Поскольку из каждой вершины многогранника W выходят по крайней мере 4 ребра, а каждое ребро соединяет 2 вершины, то $k \geqslant \frac{1}{2} \cdot 4w = 2w$. Так как каждая грань имеет не меньше 4 сторон, а при $n \geqslant 4$ сумма внутренних углов n-угольника $\geqslant 2\pi$, то $\varphi \geqslant 2\pi s$. Выберем внутри каждой грани S_i точку и соединим ее отрезками прямых со всеми вершинами, принадлежащими грани S_i. Поверхность многогранника при этом окажется разбитой на $2k$ треугольников, так как каждое ребро служит стороной ровно двух треугольников. Пусть Ψ — сумма внутренних углов всех треугольников. Тогда $4\pi w \leqslant 2k\pi = \Psi = \varphi + 2\pi s \leqslant 2\varphi$ и, таким образом, $\varphi \geqslant 2\pi w$. С другой стороны, поскольку многогранник W выпук-

лый, то $\varphi < 2\pi w$. Полученное противоречие означает, что исходное предположение о существовании выпуклого многогранника, не содержащего ни одной треугольной грани и ни одного трехгранного угла, не верно.

4. Из условий задачи следует, что среди любых 3 заданных прямых непременно окажутся 2 скрещивающиеся прямые. Поставим заданные прямые во взаимно-однозначное соответствие с вершинами выпуклого шестиугольника, помеченными цифрами 1, 2, ..., 6 (рис. 107).

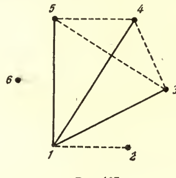


Рис. 107.

Соединим вершины шестиугольника сплошными линиями, если прямые, соответствующие вершинам, скрещиваются, и пунктирной, если соответствующие прямые не скрещиваются.

Исходная задача сводится к следующей. Даны 6 точек. Любые 2 из них соединены сплошной или пунктирной линией. Любой треугольник с вершинами в заданных точках имеет по крайней мере одну сплошную сторону. Доказать, что существует треугольник, все стороны которого сплошные.

Предположим, что треугольника с тремя сплошными сторонами не существует. Тогда какие-то 2 из заданных точек заведомо соединены пунктирной линией. Пусть, например, это будут точки *1* и *2*. Поскольку в каждом из треугольников *123*, *124*, *125*, *126* имеется сплошная сторона и эта сторона не *12*, то каждая из точек *3*, *4*, *5*, *6* соединена сплошной линией по крайней мере с одной из точек *1* и *2*.

Если бы какая-нибудь из точек *1*, *2* была соединена непрерывной линией по крайней мере с тремя из точек *3*, *4*, *5*, *6* (например, точка *1* с точками *3*, *4*, *5*), то, рассматривая треугольники *134*, *145*, *135*, имеющие по 2 сплошные стороны, мы заметили бы, что стороны *34*, *45* и *35* пунктирные (рис. 107). Следовательно, в треугольнике *345* ни одна из сторон не была бы сплошной, что по условиям задачи невозможно.

Итак, каждая из точек *1*, *2* соединена сплошными линиями с двумя из точек *3*, *4*, *5* и *6*. Не уменьшая общности, предположим, что точка *1* соединена сплошными линиями с точками *3* и *4*, а точка *2* — с точками *5* и *6*. С точками *5* и *6* точка *1* соединена пунктирными линиями так же, как точка *2* с точками *3* и *4* (рис. 108).

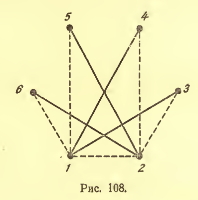


Рис. 108.

Рассмотрим треугольник *256*. Нетрудно видеть, что вершины *5* и *6* соединены пунктирной линией. Но тогда все стороны треугольника *156* пунктирные, что по условиям задачи невозможно. Полученное противоречие доказывает, что существует треугольник, все стороны которого сплошные.

5. Преобразуем неравенство $a_n + a_{n+2} \geqslant 2a_{n+1}$, приведенное в условиях задачи, к виду

$$a_{n+2} - a_{n+1} \geqslant a_{n+1} - a_n. \qquad (1)$$

Если ввести новые обозначения $b_{n+1} = a_{n+1} - a_n$ при $n = 1, 2, \ldots$, то неравенство (1) можно представить в

виде $b_{n+2} \geqslant b_{n+1}$. Следовательно, $\{b_n\}$ — неубывающая последовательность.

Записав неравенство

$$\frac{a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1}}{n+1} > \frac{a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}}{n}$$

в виде

$$n(a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1}) > (n+1)(a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}) \quad (2)$$

докажем его методом математической индукции по n. При $n = 1$ неравенство (2) переходит в $a_1 + a_3 \geqslant 2a_2$. Это не что иное, как частный случай исходного неравенства $a_n + a_{n+2} \geqslant 2a_{n+1}$.

Предположим, что неравенство (2) справедливо при некотором натуральном n. Докажем, что тогда оно выполняется и для числа $n+1$, то есть

$$(n+1)(a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1} + a_{2n+2}) \geqslant$$
$$\geqslant (n+2)(a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n} + a_{2n+3}). \quad (3)$$

Сравнивая неравенства (2) и (3), нетрудно понять, что задача сводится к доказательству неравенства

$$a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1}) + (n+1) a_{2n+3} \geqslant$$
$$\geqslant (a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}) + (n+2) a_{2n+2}, \quad (4)$$

поскольку сложив отдельно правые и левые части неравенств (2) и (4), мы получим неравенство (3).

Подвергнем неравенство (4) эквивалентному преобразованию:

$$(n+1)(a_{2n+3} - a_{2n+2}) \geqslant (a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + \ldots$$
$$\ldots + (a_{2n} - a_{2n-1}) + (a_{2n+2} - a_{2n+1}),$$
$$(n+1) b_{2n+3} \geqslant b_2 + b_4 + \ldots + b_{2n} + b_{2n+2}. \quad (5)$$

Поскольку, как доказано в начале решения, $\{b_n\}$ — неубывающая последовательность, то, в частности,

$$b_{2n+3} \geqslant b_2,$$
$$b_{2n+3} \geqslant b_4,$$
$$\cdots\cdots$$
$$b_{2n+3} \geqslant b_{2n},$$
$$b_{2n+3} \geqslant b_{2n+2}.$$

Складывая отдельно правые и левые части этих неравенств, получим неравенство (5). Следовательно, выполняются неравенства (4) и (3). Отсюда по принципу математической индукции мы заключаем, что неравенство (2) справедливо при любом натуральном числе n.

6. Исключим тривиальные случаи $0 \leqslant n \leqslant 4$ и будем в дальнейшем считать, что цифра a повторяется не менее двух раз. Ясно, что цифра a не может быть нулем. Если бы десятичная запись числа $t_n = \frac{1}{2} n(n+1)$ состояла бы из k единиц, где $k \geqslant 2$, то $9t_n = 10^k - 1$, и после несложных преобразований мы получили бы, что $(3n+1)(3n+2) = 2 \cdot 10^k = 2^{k+1} \cdot 5^k$. Поскольку последовательные натуральные числа $3n+1$, $3n+2$ взаимно просты и $2^{k+1} \leqslant 2^{2k} = 4^k < 5^k$, то $3n+1 = 2^{k+1}$, а $3n+2 = 5^k$. Вычитая из левой части второго равенства левую часть первого, а из правой — правую часть первого, получаем $1 = 5^k - 2^{k+1} > 4^k - 2^{k+1} = 2^k(2^k - 2) \geqslant 8$, так как $k \geqslant 2$. Полученное противоречие показывает, что a не может быть единицей.

Заметим, что $8t_n + 1 = (2n+1)^2$. Если бы десятичная запись числа t_n оканчивалась цифрами 2, 4, 7 или 9, то запись числа $8t_n + 1$ оканчивалась бы цифрами 7 или 3. Но последней цифрой квадрата любого натурального числа могут быть только 0, 1, 4, 5, 6 или 9. Следовательно, цифра a не может быть равной 2, 4, 7, 9.

Если десятичная запись числа t_n оканчивается набором цифр 33 или 88, то запись числа $8t_n + 1$ оканчивается цифрами 65 или 05. Но ни один квадрат натурального числа не оканчивается этими цифрами, поскольку такое число m должно быть нечетным и делиться на 5, то есть быть числом вида $m = 10k + 5$, в силу чего число $m^2 = 100k^2 + 100k + 25$ при делении на 100 давало бы остаток 25, или, что то же, десятичная запись числа m^2 оканчивалась бы цифрами 25. Следовательно, 3 и 8 не могут быть цифрой a.

Нетрудно видеть, что 5 или 6 могут быть цифрой a. Действительно, $t_{10} = 55$, $t_{11} = 66$, $t_{36} = 666$.

Примечание. Доказано, что из чисел t_n при $n > 3$ десятичная запись лишь трех чисел t_{10}, t_{11} и t_{36} содержит повторяющиеся цифры. (См. David W. Weger, Notices Amer. Math. Soc., **19** (1972), A-511, Abstr. 72-T-A152.)

7. Пусть ломаная $A_1A_2 \ldots A_n$ обладает тем свойством, о котором говорится в задаче, K_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ — круг с центром в точке A_i и радиусом 1, а F_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ — фигура, ограниченная отрезками прямых, параллельными линии центров A_iA_{i+1} и отстоящими от нее на единичное расстояние, и дугами граничных окружностей кругов K_i и K_{i+1} (на рис. 109 фигура F_i заштрихована).

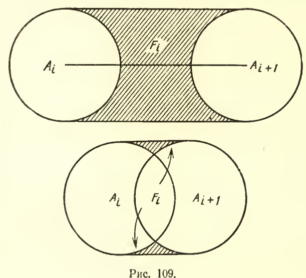


Рис. 109.

Множество точек плоскости, отстоящих от некоторой точки отрезка A_iA_{i+1} меньше чем на 1, содержится в объединении кругов K_i, K_{i+1} и фигуры F_i. Из условий задачи следует, что квадрат со стороной, равной 50, содержится в множестве

$$K_1 \cup F_1 \cup K_2 \cup F_2 \cup K_3 \cup \ldots \cup K_{n-1} \cup F_{n-1} \cup K_n = \bigcup_{i=1}^{n-1} (K_i \cup F_i) \cup K_n.$$

Поскольку площадь фигуры $(K_i \setminus K_{i+1}) \cup F_i = 2 \cdot A_iA_{i+1}$, то площадь фигуры $K_i \cup F_i$ не меньше $2A_iA_{i+1}$, а площадь круга K_i равна π. Площадь квадрата не превышает

суммы площадей фигур $K_i \cup F_i$ и круга K_n, то есть

$$2500 \leqslant 2 \sum_{i=1}^{n-1} A_i A_{i+1} + \pi.$$

Следовательно, длина ломаной $= \sum_{i=1}^{n-1} A_i A_{i+1} \geqslant 1250 - \frac{\pi}{2} >$ > 1248.

8. Круг диаметром 1 имеет общую точку с квадратом $ABCD$ со стороной 1 в том и только в том случае, если центр P круга находится от стороны квадрата на расстоянии не больше $1/2$. Следовательно, точка P принадлежит фигуре $A'B'B''C''C'D'D''A''$ (рис. 110), составленной из квадрата $ABCD$, четырех прямоугольников

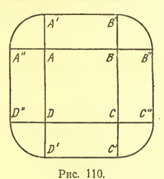


Рис. 110.

размера $1 \times 1/2$ и четырех четвертей круга радиуса $1/2$. Площадь этой фигуры равна $1 + 4 \cdot 1 \cdot 1/2 + 4 \cdot 1/4 \pi (1/2)^2 = 3 + \pi/4$.

Если каждому из 120 заданных квадратов мы сопоставим фигуру, изображенную на рис. 110, и обозначим суммарную площадь всех 120 фигур через F_1, то $F_1 \leqslant 120 \cdot (3 + \pi/4) = 360 + 30\pi$, поскольку фигуры, соответствующие отдельным квадратам, могут перекрываться.

Центр круга диаметром 1, расположенный внутри заданного прямоугольника, находится от сторон прямоугольника на расстоянии меньше $1/2$ в том и только в том случае, если круг не содержится целиком в прямо-

угольнике. Множество точек прямоугольника, отстоящих от одной из его сторон меньше чем на $1/2$, образует фигуру F_2 (рис. 111) площадью $20 \cdot 25 - 19 \cdot 24 = 44$.

Так как $\pi < 3{,}2$, то сумма площадей фигур F_1 и F_2 меньше $360 + 30 \cdot 3{,}2 + 44 = 500$, а площадь заданного прямоугольника равна $20 \cdot 25 = 500$.

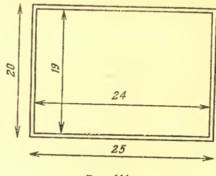


Рис. 111.

Следовательно, существует точка P — принадлежащая заданному прямоугольнику и не принадлежащая ни фигуре F_1, ни фигуре F_2, а круг единичного диаметра с центром в точке P целиком содержится в заданном прямоугольнике и не имеет общих точек ни с одним из 120 заданных квадратов.

9. Если два единичных куба имеют по крайней мере 3 общие вершины, то они обладают общей гранью. Наоборот, каждая грань единичного куба, не содержащаяся в грани большого куба, задает пару единичных кубов, имеющих по крайней мере 3 общие вершины. Определим число таких граней. Число единичных кубов равно n^3, каждый из них имеет по 6 граней, но $6n^2$ граней содержится в гранях большого куба. Следовательно, внутри большого куба находятся $6n^3 - 6n^2$ граней единичных кубов и каждая из них сосчитана дважды. Итак, число пар единичных кубов, имеющих по крайней мере 3 общие вершины, равно $3n^3 - 3n^2$. Поскольку число всех пар единичных кубов равно $\binom{n^3}{2} = \frac{1}{2} n^3 (n^3 - 1)$, то число пар, образованных единичными кубами, которые

имеют не больше двух общих вершин, равно

$$\frac{1}{2}n^3(n^3-1)-(3n^3-3n^2)=\frac{1}{2}n^2(n^4-7n+6).$$

10. I. решение. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, вписанный в окружность, P, Q, R, S — середины его сторон и O — середина отрезка PR (рис. 112).

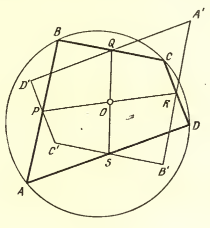


Рис. 112.

Тогда [1]

$$P=\frac{1}{2}(A+B),\quad Q=\frac{1}{2}(B+C),\quad R=\frac{1}{2}(C+D),$$

$$S=\frac{1}{2}(D+A),\quad O=\frac{1}{2}(P+R)=\frac{1}{4}(A+B+C+D).$$

Так как $\frac{1}{2}(Q+S)=\frac{1}{4}(A+B+C+D)=O$, то точка O совпадает с серединой отрезка QS.

Пусть $A'B'C'D'$ — образ четырехугольника $ABCD$ при симметрии относительно точки O. Так как при центральной симметрии середина отрезка переходит в середину отрезка, а в рассматриваемой симметрии точки P и R

[1] Суммой точек $X=(x_1, x_2)$ и $Y=(y_1, y_2)$ по определению называется точка $X+Y=(x_1+y_1,\ x_2+y_2)$; произведением точки $X=(x_1, x_2)$ и числа a — точка $aX=(ax_1,\ ax_2)$. В этих обозначениях середину Z отрезка XY можно записать так: $Z=1/2(X+Y)$.

переходят в точки R и P, точки Q и S — в точки S и Q, то точки P, Q, R, S совпадают с серединами сторон четырехугольника $A'B'C'D'$. Четырехугольник $A'B'C'D'$ можно вписать в окружность, поскольку его прообраз — четырехугольник $ABCD$ — можно вписать в окружность, и это свойство сохраняется при центральной симметрии. Стороны четырехугольника $A'B'C'D'$ параллельны соответственным сторонам четырехугольника $ABCD$, поэтому прямые, проходящие через середины сторон четырехугольника $ABCD$ перпендикулярно противоположным сторонам, совпадают с прямыми, проходящими через середины соответственных сторон четырехугольника $A'B'C'D'$ перпендикулярно к этим сторонам. Эти прямые пересекаются в центре описанной окружности четырехугольника $A'B'C'D'$, поскольку его стороны можно рассматривать как хорды описанной окружности, а перпендикуляр, восставленный из середины хорды, проходит через центр окружности. Таким образом, прямые, о которых говорится в задаче, пересекаются в одной точке — центре описанной окружности четырехугольника $A'B'C'D'$.

II решение. Пусть K — центр описанной окружности четырехугольника $ABCD$, P, Q, R, S — середины его сторон. Тогда

$$P=\frac{1}{2}(A+B),\quad Q=\frac{1}{2}(B+C),\quad R=\frac{1}{2}(C+D),$$
$$S=\frac{1}{2}(D+A).$$

Выберем систему координат так, чтобы точка K совпала с ее началом. Поскольку прямая, проходящая через центр окружности и середину хорды, перпендикулярна хорде, то $KP\perp AB$, $KQ\perp BC$, $KR\perp CD$, $KS\perp DA$.

Параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку U и параллельной вектору $\overrightarrow{VW}$, имеет вид

$$p(t)=U+t(W-V).$$

Прямая, проходящая через середину стороны AB и перпендикулярная стороне CD, параллельна вектору $\overrightarrow{KR}$. Следовательно, ее параметрическое уравнение имеет вид

$$p(t)=\frac{1}{2}(A+B)+t(R-K)=\frac{1}{2}(A+B)+\frac{t}{2}(C+D).$$

Подставляя $t = 1$, убеждаемся в том, что точка $p(1) = \frac{1}{2}(A + B + C + D)$ принадлежит рассматриваемой прямой.

Аналогичным образом можно доказать, что точка $\frac{1}{2}(A + B + C + D)$ принадлежит каждой из прямых, о которых говорится в условиях задачи. Следовательно, все эти прямые пересекаются в точке $p(1) = \frac{1}{2}(A + B + C + D)$.

11. Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{25}\}$ — множество заданных чисел, причем $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{25}$. Предположим, что при любых r, s, где $1 \leqslant r < s \leqslant 25$, $a_s + a_r \in A \setminus \{a_r, a_s\}$ или $a_s - a_r \in A \setminus \{a_r, a_s\}$. Поскольку ясно, что $a_r - a_s < 0$, то число $a_r - a_s$ не принадлежит множеству A.

Так как неравенство $a_{25} + a_i > a_{25}$ выполняется при $i = 1, 2, \ldots, 24$, то $a_{25} + a_i \notin A$, и в силу принятого нами предположения 24 числа $a_{25} - a_i$ образуют убывающую последовательность, все члены которой принадлежат множеству $A \setminus \{a_{25}\}$, насчитывающему 24 элемента. Это означает, что при $i = 1, 2, \ldots, 24$

$$a_{25} - a_i = a_{25-i}.$$

Так как неравенство $a_{24} + a_j > a_{24} + a_1 = a_{25}$ выполняется при $j = 2, 3, \ldots, 23$, то $a_{24} + a_j \notin A$ и в силу принятого нами предположения $a_{24} - a_j \in A$. Кроме того, $a_{24} - a_j \leqslant a_{24} - a_2 = (a_{25} - a_1) - (a_{25} - a_{23}) = a_{23} - a_1 < a_{23}$. Следовательно, 22 числа $a_{24} - a_j$ образуют убывающую последовательность, члены которой принадлежат множеству $A \setminus \{a_{23}, a_{24}, a_{25}\}$, содержащему 22 элемента. Это означает, что при $j = 2, 3, \ldots, 23$

$$a_{24} - a_j = a_{24-j}.$$

В частности, $a_{24} - a_{12} = a_{12}$ и поэтому $a_{24} - a_{12} \notin A \setminus \{a_{12}, a_{24}\}$. Кроме того, $a_{24} + a_{12} > a_{24} + a_1 = a_{25}$, в силу чего $a_{24} + a_{12} \notin A$, что противоречит исходному предположению.

12. Докажем сначала, что множество Z вершин правильного пятиугольника обладает тем свойством, о котором говорится в задаче, в силу чего $n \leqslant 5$. Точнее говоря, докажем, что любая сторона правильного пятиугольника параллельна какой-нибудь диагонали и, нао-

борот, любая диагональ параллельна одной из его сторон.

Достаточно доказать, что $AB \parallel CE$ (рис. 113). Поскольку четырехугольник $ABCE$ можно вписать в окружность (а именно, в описанную окружность правильного пятиугольника), то $\angle A + \angle BCE = \pi$. Так как $\angle A = \angle B$, то $\angle BCE = \pi - \angle B$. Таким образом, $AB \parallel CE$.

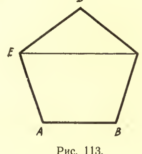
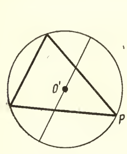


Рис. 113.

С другой стороны, из условий задачи следует, что $n \geqslant 4$, поскольку по крайней мере 2 несовпадающие прямые параллельны и каждая из них проходит по крайней мере через две точки множества Z. Если бы $n = 4$ и точки A, B, C, D удовлетворяли условиям задачи, то они располагались бы в вершинах трапеции. Но ни одна из диагоналей трапеции не параллельна другой прямой, заданной двумя ее вершинами. Таким образом, $n > 4$, и из доказанного выше неравенства $n \leqslant 5$ следует, что $n = 5$.

13. Пусть O — центр вписанной и описанной сфер тетраэдра $ABCD$, r и R — их радиусы. Если O' — точка касания вписанной сферы с одной из граней тетраэдра, а P — одна из вершин, принадлежащих этой грани, то, применяя к треугольнику $OO'P$ теорему Пифагора, получаем $O'P = \sqrt{R^2 - r^2}$. Таким образом, точка O' равноудалена от всех вершин рассматриваемой грани и поэтому совпадает с центром описанной окружности этой грани. Отсюда также следует, что радиусы описанных окружностей всех граней тетраэдра равны одной и той же величине $\sqrt{R^2 - r^2}$.

Точка O' лежит внутри грани, так как O' — точка касания грани и вписанной сферы. Кроме того, точка O' совпадает с центром описанной окружности грани, поэтому все углы грани острые, поскольку они вписаны в окружность и опираются на дуги, которые меньше половины окружности (рис. 114).



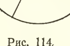


Рис. 114.

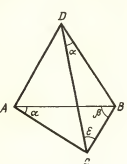


Рис. 115.

Применяя теорему синусов к треугольникам ABC и CBD (рис. 115), получаем $\sin(\angle BAC)=\frac{BC}{2\sqrt{R^2-r^2}}$ и $\sin(\angle BDC)=\frac{BC}{2\sqrt{R^2-r^2}}$, откуда $\sin(\angle BAC)=\sin(\angle BDC)$, а значит, и $\angle BAC=\angle BDC$, поскольку оба угла острые. Аналогичным образом докажем, что любые 2 внутренних угла граней тетраэдра, лежащие против одного и того же ребра, равны, то есть $\angle ABC=\angle ADC$, $\angle ACB=\angle ADB$, $\angle ABD=\angle ACD$, $\angle BAD=\angle BCD$, $\angle CAD=\angle CDB$. Пусть α, β, γ, δ, ε, η — величины попарно равных углов, встречающихся в шести указанных равенствах. Тогда

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi,\quad \beta+\delta+\eta=\pi, \qquad (1)$$

$$\gamma+\delta+\varepsilon=\pi,\quad \alpha+\varepsilon+\eta=\pi, \qquad (2)$$

так как сумма внутренних углов любой грани равна π.

Складывая левые и правые части равенств (1) и отдельно равенств (2), получаем

$$\alpha+2\beta+\gamma+\delta+\eta=2\pi,\quad \alpha+\gamma+\delta+2\varepsilon+\eta=2\pi. \qquad (3)$$

Поскольку правые части равенств (3) равны, то их левые части также равны, откуда $\beta=\varepsilon$. Поскольку

$\beta = \angle ABC$, а $\varepsilon = \angle BCD$, то отсюда следует, что треугольники ABC и DCB конгруэнтны (рис. 115).

Аналогичным образом можно доказать, что любые 2 грани тетраэдра $ABCD$ также конгруэнтны.

Примечание. Если центр описанной окружности некоторого треугольника совпадает с центром вписанной окружности, то такой треугольник равносторонний. Аналогичное утверждение для трехмерного пространства не верно: существуют неправильные тетраэдры, у которых центр описанной сферы совпадает с центром вписанной сферы.

Например, рассмотрим тетраэдр $ABCD$, где $A = (1, a, 0)$, $B = (-1, a, 0)$, $C = (0, -a, 1)$, $D = (0, -a, -1)$ и a — положительное число, отличное от $\sqrt{2}/2$. Тогда $AB = 2$ и $AC = \sqrt{2 + 4a^2} \neq 2$. Следовательно, тетраэдр $ABCD$ неправильный. Каждая из трех изометрий $f_1(x, y, z) = (x, y, -z)$, $f_2(x, y, z) = (-x, y, z)$, $f_3(x, y, z) = (z, -y, x)$ отображает множество вершин $\{A, B, C, D\}$ тетраэдра на себя. Следовательно, при каждой из изометрий f_i $(i = 1, 2, 3)$ центр $P = (r, s, t)$ описанной сферы тетраэдра $ABCD$ переходит в себя. Из $f_1(P) = P$ получаем $t = 0$, из $f_2(P) = P - r = 0$ и из $f_3(P) = P - s = 0$, поэтому $P = (0, 0, 0)$. Аналогичным образом можно доказать, что P — центр вписанной сферы тетраэдра $ABCD$.

14. Как известно, положительные числа x, y, z могут выражать длины сторон некоторого треугольника в том и только в том случае, если каждое из них меньше суммы двух остальных, то есть если

$$x < y + z, \quad y < x + z, \quad z < x + y. \qquad (*)$$

Неравенство, приведенное в условиях задачи, тождественными преобразованиями можно сначала привести к виду

$$z(x^2 + y^2 - z^2) + x(y^2 + z^2 - x^2) + y(z^2 + x^2 - y^2) - 2xyz > 0,$$

а затем — к виду

$$x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y - x^3 - y^3 - z^3 - 2xyz > 0.$$

С другой стороны,

$$(y + z - x)(z + x - y)(x + y - z) = x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y - x^3 - y^3 - z^3 - 2xyz.$$

Таким образом, неравенство, приведенное в условиях задачи, равносильно неравенству

$$(y + z - x)(z + x - y)(x + y - z) > 0.$$

Следовательно, либо все 3 числа $y+z-x$, $z+x-y$, $x+y-z$ положительны, либо 2 из них отрицательны.

В первом случае мы получаем неравенства (1), поэтому числа x, y, z могут выражать длины сторон некоторого треугольника.

Предположим, что во втором случае отрицательны числа $y+z-x$ и $z+x-y$. Складывая их, получаем $2z<0$. Полученное противоречие показывает, что второй случай представиться не может.

Примечание. Из доказанного следует, что неравенство, приведенное в условиях задачи, равносильно неравенствам треугольника (*). Таким образом, утверждение, обратное утверждению задачи, также верно.

15. Докажем сначала несколько лемм.

Лемма 1. *При $r=1, 2, \ldots$ число $r!$ не делится на 2^r.*

Доказательство. Как известно, число 2 входит в разложение числа $r!$ на простые множители с показателем степени, равным

$$\alpha=\left[\frac{r}{2}\right]+\left[\frac{r}{4}\right]+\left[\frac{r}{8}\right]+\ldots+\left[\frac{r}{2^k}\right],$$

где $2^k \leqslant r < 2^{k+1}$. Следовательно,

$$\alpha \leqslant \frac{r}{2}+\frac{r}{4}+\frac{r}{8}+\ldots+\frac{r}{2^k}=r\left(1-\frac{1}{2^k}\right)<r.$$

Лемма 2. *Если k — нечетное число, а t — натуральное число, то существует такое целое число s, что число $ks-1$ делится на 2^t.*

Доказательство. Так как k — нечетное число, то его можно представить в виде $k=1-2w$, где w — некоторое целое число. Полагая $s=1+(2w)+(2w)^2+\ldots+(2w)^{t-1}$, получаем $ks=1-(2w)^t$. Следовательно, число $ks-1$ делится на 2^t.

Лемма 3. *Если $f(x)$ — многочлен с целочисленными коэффициентами и число $3^n+f(n)$ делится на 2^{m+1} при $n=0, 1, 2, \ldots$, то многочлен $w(x)=f(x)+2^m$ обладает тем свойством, что наибольший общий делитель чисел $a_n=3^n+w(n)$ при $n=0, 1, 2, \ldots$ равен 2^m.*

Доказательство. Так как числа $3^n + f(n)$ при любом неотрицательном целом n делятся на 2^{m+1}, то существует такое целое число b_n, что $3^n + f(n) = 2^{m+1}b_n$.

Докажем, что наибольший общий делитель чисел a_n равен некоторой целой степени числа 2.

Пусть p — простой делитель каждого из чисел a_n, где $n = 0, 1, 2, \ldots$. Достаточно доказать, что $p = 2$.

Так как p — делитель всех чисел a_n, то, в частности, на p делятся числа a_0 и a_p. Следовательно, разность $a_p - a_0 = (3^p - 1) + (w(p) - w(0))$ также делится на p. Пусть $w(x) = c_0 + c_1x + \ldots + c_rx^r$, где $c_0, c_1, \ldots, c_r$ — целые числа. Ясно, что число $w(p) - w(0) = c_1p + c_2p^2 + \ldots c_rp^r$ делится на p, поэтому $3^p - 1$ также делится на p. Это означает, что $p \neq 3$. Но тогда из малой теоремы Ферма следует, что $3^{p-1} - 1$ делится на p и поэтому $(3^p - 1) - (3^{p-1} - 1) = 2 \cdot 3^{p-1}$ также делится на p. Поскольку $p \neq 3$, то мы заключаем отсюда, что $p = 2$. Итак, наибольший общий делитель чисел a равен некоторой целой степени числа 2. Кроме того, $a_n = 3^n + w(n) = 3^n + f(n) + 2^m = 2^{m+1}b_n + 2^m = 2^m(2b_n + 1)$. Следовательно, любое из чисел a_n делится на 2^m и ни одно из них не делится на 2^{m+1}, а это и означает, что 2^m — наибольший общий делитель чисел a_n.

Переходим теперь к решению задачи. Из леммы 3 следует, что достаточно найти такой многочлен $f(x)$ с целочисленными коэффициентами, при котором каждое из чисел $3^n + f(n)$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, делится на 2^{m+1}.

Пусть $f_j(x) = \frac{x(x-1)\ldots(x-j+1)}{j!}$ при $j = 1, 2, \ldots, m$. Тогда $f_j(n) = \binom{n}{j}$ при $n \geqslant j$ и $f_j(n) = 0$ при $n = 0, 1, 2, \ldots, j-1$.

По формуле бинома Ньютона при $n \geqslant m$ число 3^n можно записать в виде

$$3^n = (1+2)^n = 1 + 2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \ldots$$
$$\ldots + 2^m\binom{n}{m} + 2^{m+1}\binom{n}{m+1} + \ldots + 2^n =$$
$$= 1 + 2f_1(n) + 2^2f_2(n) + \ldots + 2^mf_m(n) + 2^{m+1}A,$$

где A — некоторое целое число.

Аналогично при $n < m$ справедливо разложение

$$3^n = (1+2)^n = 1 + 2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \ldots + 2\binom{n}{n} =$$
$$= 1 + 2f_1(n) + 2^2 f_2(n) + \ldots + 2^n f_n(n) +$$
$$+ 2^{n+1} f_{n+1}(n) + \ldots + 2^m f_m(n),$$

так как $f_{n+1}(n) = \ldots = f_m(n) = 0$.

Таким образом, многочлен $g(x) = -(1 + 2f_1(x) + 2^2 f_2(x) + \ldots 2^m f_m(x))$ обладает тем свойством, что каждое из чисел $3^n + g(n)$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, делится на 2^{m+1}. В общем случае коэффициенты многочлена не являются целыми числами.

Из леммы 1 следует, что коэффициенты многочлена $2^r f_r(x)$, где $r = 1, 2, \ldots, m$ — рациональные числа с нечетными знаменателями. Пусть k — наименьший общий знаменатель всех коэффициентов многочлена $g(x)$. Тогда $g(x) = \frac{h(x)}{k}$, где $h(x)$ — многочлен с целочисленными коэффициентами. Число k нечетно. Следовательно, по лемме 2 существует такое целое число, что $ks - 1$ делится на 2^{m+1}.

Докажем, что в качестве многочлена $f(x)$ можно выбрать многочлен $sh(x)$. Действительно, коэффициенты многочлена $sh(x)$ — целые числа. Кроме того, при $n = 0, 1, 2, \ldots$ числа

$$3^n + f(n) = 3^n + sh(n) = 3^n + ksg(n) =$$
$$= (3^n + g(n)) + (ks - 1) \cdot g(n)$$

делятся на 2^{m+1}, так как $3^n + g(n)$ и $ks - 1$ делятся на 2^{m+1}.

По лемме 3 наибольший общий делитель чисел $3^n + f(n) + 2^m$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, равен 2^m. Следовательно, можно считать, что $w(x) = f(x) + 2^m$.

16. I. решение. Если хранителей документов четыре (A, B, C, D), то достаточно четырех телефонных разговоров: сначала A и B сообщают друг другу содержание хранящихся у них документов, и то же самое делают C и D, а затем A и C обмениваются полученными сведениями, а B и D следует их примеру.

Если число лиц n больше 4, то выделим четырех из них и обозначим A, B, C, D. Сначала каждый из $n - 4$

остальных лиц сообщает A содержание хранящихся у них документов, затем A, B, C и D проводят между собой 4 разговора (описанных выше) и обмениваются полученными сведениями. Наконец, каждое из $n-4$ лиц, не входящих в выбранную нами четверку A, B, C, D, звонит A и знакомится с содержанием всех документов.

Всего потребуется провести $(n-4)+4+(n-4)=$ $=2n-4$ телефонных разговора, после чего каждое из n лиц будет осведомлено о содержании всех документов.

II решение. Докажем методом математической индукции по n, что n лицам (при $n \geqslant 4$) достаточно провести $2n-4$ телефонных разговора.

При $n=4$ доказательство проводится так же, как в I решении. Предположим, что утверждение задачи верно при некотором $n \geqslant 4$. Докажем, что тогда $(n+1)$ лицам достаточно провести $2(n+1)-4=2n-2$ телефонных разговоров.

Сначала $(n+1)$-е лицо звонит первому и сообщает тому содержание своих документов. Затем по предположению индукции n первых лиц могут провести $2n-4$ телефонных разговоров и ознакомиться с содержанием всех документов. Наконец, $(n+1)$-е лицо снова звонит 1-му и получает от того сведения о содержании всех документов.

Общее число всех телефонных разговоров равно $1+(2n-4)+1=2n-2$, и каждое из $(n+1)$ лиц осведомлено о содержании всех документов.

17. I решение. Пусть $ABCDE$ — данный выпуклый пятиугольник, а $A'B'C'D'E'$ — такой правильный пятиугольник, что площадь треугольника $A'B'C'$ равна 1. Поскольку площади треугольников ABC и ABE равны, то расстояния от вершин C и E до прямой AB также равны. Следовательно, $CE \parallel AB$ и аналогично любая диагональ пятиугольника $ABCDE$ параллельна одной из его сторон.

Для любой тройки точек, не лежащих на одной прямой, существует аффинное преобразование, переводящее ее в любую другую тройку точек, не лежащих на одной прямой. Пусть φ — такое аффинное преобразование, что $\varphi(A)=A'$, $\varphi(B)=B'$ и $\varphi(C)=C'$. Любое аффинное преобразование сохраняет отношение площадей.

Поскольку площади треугольников ABC и $\varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)$ равны, то аффинное преобразование φ сохраняет площадь фигур.

Любое аффинное преобразование сохраняет параллельность отрезков. Следовательно, $\varphi(C)\varphi(E) \parallel \varphi(A)\varphi(B)$ или $C'\varphi(E) \parallel A'B'$. Но тогда $\varphi(E) \in C'E'$ и аналогично $\varphi(D) \in A'D'$. Кроме того, $\varphi(D)\varphi(E) \parallel A'C'$, в силу чего $\varphi(D)\varphi(E) \parallel D'E'$ (рис. 116).

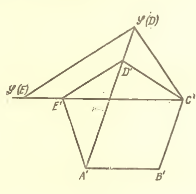


Рис. 116.

Если бы $\varphi(D) \neq D'$, то один из треугольников $C'\varphi(D)\varphi(E)$ и $C'D'E'$ целиком находился бы в другом, что невозможно, так как площади этих треугольников равны. Следовательно, $\varphi(D) = D'$ и аналогично $\varphi(E) = E'$. Таким образом, аффинное отображение φ переводит пятиугольник $ABCDE$ в правильный пятиугольник $A'B'C'D'E'$, а поскольку φ сохраняет площади, то площади пятиугольников $ABCDE$ и $A'B'C'D'E'$ равны.

Площадь пятиугольника $A'B'C'D'E'$ нетрудно вычислить. Площадь треугольника $A'B'C'$ равна

$$1 = \frac{1}{2} A'B' \cdot B'C' \cdot \sin(\angle A'B'C') = \frac{1}{2} a^2 \sin\frac{3\pi}{5},$$

где $a = A'B'$ (рис. 117), откуда

$$a^2 = \frac{2}{\sin\frac{3\pi}{5}}.$$

Расстояние d от центра правильного пятиугольника O до стороны $A'B'$ равно

$$d = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{3\pi}{10}.$$

Следовательно, площадь правильного пятиугольника $A'B'C'D'E'$ составляет

$$5 \cdot \frac{1}{2} ad = \frac{5}{4} a^2 \operatorname{tg} \frac{3\pi}{10} = \frac{5}{4\cos^2 \frac{3\pi}{10}} \approx 3{,}62.$$

II решение. Пусть $ABCDE$ — заданный выпуклый пятиугольник и P — точка пересечения отрезков BD и CE (рис. 118). По аналогии с предыдущим решением до-

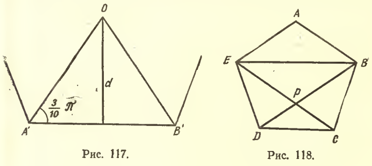


Рис. 117. Рис. 118.

кажем, что $CE \parallel AB$ и $BD \parallel AE$. Следовательно, четырехугольник $ABPE$ — параллелограмм и поэтому площади треугольников BPE и BAE равны

$$S_{BPE} = S_{BAE} = 1. \tag{1}$$

Если высоты двух треугольников равны, то отношение их площадей равно отношению оснований. Следовательно,

$$\frac{S_{BPC}}{S_{DPC}} = \frac{BP}{DP} \quad \text{и} \quad \frac{S_{BPE}}{S_{DPE}} = \frac{BP}{DP},$$

откуда

$$\frac{S_{BPC}}{1 - S_{BPC}} = \frac{S_{BPE}}{S_{DPE}}. \tag{2}$$

Поскольку по условиям задачи

$$1 = S_{BCD} = S_{BPC} + S_{DPC},$$
$$1 = S_{ECD} = S_{DPE} + S_{DPC},$$

то

$$S_{BPC} = S_{DPE}. \qquad (3)$$

Пусть $a = S_{BPC}$. Тогда из соотношений (1), (2) и (3) получаем

$$\frac{a}{1-a} = \frac{1}{a},$$

или

$$a^2 + a - 1 = 0. \qquad (4)$$

Поскольку $a > 0$ и уравнение (4) имеет лишь один положительный корень, то $a = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})$. Таким образом,

$$S_{ABCDE} = S_{ABE} + S_{BPE} + S_{DCE} + S_{BPC} = $$
$$= 3 + a = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{5}).$$

18. Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — отличные от нуля векторы, параллельные ребрам заданного трехгранного угла. Ясно, что любые два из векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ не параллельны. Из условий задачи следует, что по крайней мере два из чисел $\lambda = \vec{b}\vec{c}$, $\mu = \vec{c}\vec{a}$, $\nu = \vec{a}\vec{b}$ отличны от нуля, поскольку не более двух векторов из $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ортогональны. Но тогда векторы

$$\vec{r} = \lambda\vec{a} - \mu\vec{b}, \quad \vec{s} = \mu\vec{b} - \nu\vec{c}, \quad \vec{t} = \nu\vec{c} - \lambda\vec{a} \qquad (1)$$

отличны от нуля. Из соотношений (1) получаем $\vec{r} + \vec{s} = \vec{t}$, или векторы $\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}$ параллельны одной и той же плоскости. Кроме того, $\vec{r}\vec{c} = \lambda\vec{a}\vec{c} - \mu\vec{b}\vec{c} = \lambda\mu - \mu\lambda = 0$, то есть векторы $\vec{r}$ и $\vec{c}$ ортогональны. Аналогичным образом можно доказать, что $\vec{s} \perp \vec{a}$, $\vec{t} \perp \vec{b}$.

Таким образом, прямая, лежащая в плоскости, параллельной векторам $\vec{a}$ и b, и перпендикулярная ребру, па-

раллельному вектору $\vec{c}$, по направлению совпадает с вектором $\vec{r}$. Аналогичным образом можно доказать, что остальные две прямые, о которых говорится в задаче, параллельны векторам $\vec{s}$ и $\vec{t}$.

Итак, мы доказали, что векторы $\vec{r}$, $\vec{s}$, $\vec{t}$ параллельны одной и той же плоскости. Каждая из прямых, упоминаемых в условиях задачи, параллельна одному из этих векторов, и все 3 прямые пересекаются в одной точке. Следовательно, все 3 прямые лежат в одной плоскости.

19. Плоскость, делящая пополам двугранный угол, является плоскостью его симметрии. Следовательно, образ D' вершины D при отражении относительно любой из плоскостей, делящих пополам двугранные углы при ребрах AB, BC и CA, лежит в плоскости ABC. Это означает, что если P — ортогональная проекция вершины D на одну из плоскостей, делящих пополам двугранные углы, то точка P — середина отрезка DD'. Таким образом, P — образ точки D' при гомотетии φ с центром в точке D и коэффициентом $1/2$. Следовательно, ортогональные проекции точки P на все три плоскости, делящие пополам двугранные углы при ребрах AB, BC и CD, расположены в одной плоскости, которая служит образом плоскости ABC при гомотетии φ.

20. Докажем сначала следующую лемму.

Лемма 1. *Отрезок, соединяющий соответственные точки деления противоположных сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$, о котором говорится в задаче, пересекается с отрезками, соединяющими соответственные точки деления двух других сторон четырехугольника, в точках, делящих этот отрезок на 3 равные части.*

Доказательство. Пусть точки S, Z, W, R делят стороны AB, BC, DC, AD заданного четырехугольника $ABCD$ в отношении $1:2$ (рис. 119) и E — точка пересечения отрезков RZ и SW. Достаточно доказать, что точка E делит каждый из этих отрезков в отношении $1:2$.

Поскольку

$$\frac{AR}{AD}=\frac{AS}{AB}=\frac{1}{3},$$

то по теореме, обратной теореме об отношении отрезков, высекаемых на сторонах угла параллельными прямыми, получаем, что $RS \parallel DB$. Следовательно, треугольники

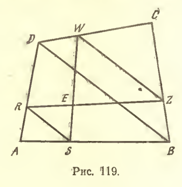


Рис. 119.

ARS и ADB подобны и коэффициент подобия равен $^1/_3$, откуда

$$\frac{RS}{DB}=\frac{1}{3}. \qquad (1)$$

Аналогичным образом из равенства отношений

$$\frac{CW}{CD}=\frac{CZ}{CB}=\frac{2}{3}$$

заключаем, что $WZ \parallel DB$, в силу чего треугольник CWZ подобен треугольнику CDB и коэффициент подобия равен $2:3$. Но тогда

$$\frac{WZ}{DB}=\frac{2}{3}. \qquad (2)$$

Из соотношений (1) и (2) получаем

$$\frac{RS}{WZ}=\frac{1}{2}.$$

Кроме того, $RS \parallel WZ$. Следовательно, треугольники RSE и ZWE подобны с коэффициентом подобия $1:2$. Отсюда в частности следует, что

$$\frac{RE}{EZ}=\frac{SE}{EW}=\frac{1}{2}.$$

Итак, лемма 1 доказана. Приступаем к решению задачи. Пусть точки R, $G \in AD$, W, $P \in DC$, Q, $Z \in BC$, S, $H \in AB$ делят каждый из отрезков AD, DC, BC, AB на 3 равные части (рис. 120). По доказанной выше лемме точки E, $U \in RZ$, T, $F \in GQ$, E, $T \in WS$, F, $U \in HP$ также делят каждый из отрезков RZ, GQ, WS, HP на 3 равные части.

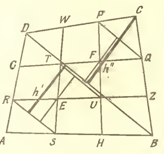


Рис. 120.

I решение. Так как $RE = EU$, $TE = ES$, то по теореме, обратной теореме об отношениях отрезков, высекаемых на сторонах угла параллельными прямыми, мы заключаем, что $RS \parallel TU$. Следовательно, треугольники ERS и ETU конгруэнтны и $RS = TU$.

Доказывая лемму 1, мы установили, что $RS \parallel DB$ и $RS = {}^1/_3 DB$. Аналогичным образом можно доказать, что $PQ \parallel DB$ и $PQ = {}^1/_3 DP$. Следовательно, $TU \parallel RS \parallel DB \parallel PQ$ и

$$PQ = RS = TU = \frac{1}{3} DB. \quad (3)$$

Опустив в треугольниках

$$ARS,\ ERS,\ ETU,\ FTU,\ FPQ,\ CPQ \quad (4)$$

высоты на основания RS, TU, PQ, заметим, что сумма этих высот равна сумме высот h' и h'' треугольников ABD и CBD, построенных на основании DB. Поскольку основания треугольников (4) равны (в силу соотношения (3) каждое из них составляет ${}^1/_3 DB$), то сумма площадей этих треугольников, или сумма площадей

четырехугольников $ARES$, $ETFU$, $FPCQ$, равна половине произведения $^1/_3 DB$ и суммы их высот, или

$$\frac{1}{2}(h' + h'') \cdot \frac{1}{3} DB = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} h' \cdot DB + \frac{1}{2} h'' \cdot DB\right) =$$
$$= \frac{1}{3}(S_{ABD} + S_{CBD}) = \frac{1}{3} S_{ABCD}.$$

II решение. Пусть s_k $(k = 1, 2, \ldots, 9)$ площадь четырехугольника с номером k (рис. 121), а S — площадь заданного четырехугольника $ABCD$.

Докажем еще одну лемму.

Лемма 2. *Если выпуклый четырехугольник $KLMN$ разделен прямыми, проходящими через середины противоположных сторон, на четыре четырехугольника, то сумма площадей двух четырехугольников, содержащих вершины K и M, равна сумме площадей двух остальных четырехугольников.*

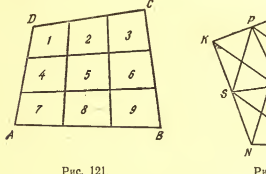


Рис. 121.

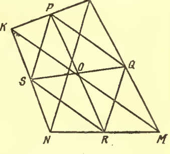


Рис. 122.

Доказательство. Пусть P, Q, R, S — середины сторон KL, LM, MN, NK и O — точка пересечения прямых PR и QS (рис. 122). Тогда $PQ \parallel KM \parallel SR$ и $PS \parallel LN \parallel QR$, в силу чего четырехугольник $PQRS$ — параллелограмм. Следовательно, площади треугольников OPQ, OQR, OSP и ORS равны:

$$S_{OPQ} = S_{OQR} = S_{OSP} = S_{ORS}. \qquad (5)$$

Поскольку треугольник KSP подобен треугольнику KLN с коэффициентом подобия $^1/_2$, то отношение площа-

дей этих треугольников равно 1/4. Аналогичным образом выводим остальные равенства.

$$S_{KPS} = \frac{1}{4} S_{KLN}, \quad S_{LPQ} = \frac{1}{4} S_{LKM},$$

$$S_{MQR} = \frac{1}{4} S_{MLN}, \quad S_{NRS} = \frac{1}{4} S_{NMK}. \tag{6}$$

Из соотношений (6) получаем

$$S_{KPS} + S_{MQR} = \frac{1}{4} S_{KLN} + \frac{1}{4} S_{MLN} = \frac{1}{4} S_{KLMN}$$

и

$$S_{LPQ} + S_{NRS} = \frac{1}{4} S_{KLM} + \frac{1}{4} S_{NMK} = \frac{1}{4} S_{KLMN}.$$

Следовательно,

$$S_{KPS} + S_{MQR} = S_{LPQ} + S_{NRS}. \tag{7}$$

Из соотношения (5) получаем

$$S_{OSP} + S_{OQR} = S_{OPQ} + S_{ORS}. \tag{8}$$

Складывая отдельно правые и левые части равенств (7) и (8), приходим к утверждению леммы. Итак, лемма 2 доказана.

Из лемм 1 и 2 следует, что

$$s_1 + s_5 = s_2 + s_4, \tag{9}$$

$$s_3 + s_5 = s_2 + s_6, \tag{10}$$

$$s_5 + s_7 = s_4 + s_8, \tag{11}$$

$$s_5 + s_9 = s_6 + s_8. \tag{12}$$

Складывая равенства (9) и (12), а также (10) и (11), получаем

$$s_1 + 2s_5 + s_9 = s_2 + s_4 + s_6 + s_8,$$

$$s_3 + 2s_5 + s_7 = s_2 + s_4 + s_6 + s_8, \tag{13}$$

откуда

$$s_1 + s_9 = s_3 + s_7. \tag{14}$$

Таким образом, из равенства (13) следует, что

$$s_3 + s_5 + s_7 = s_2 + s_4 + s_6 + s_8 - s_5 =$$
$$= S - (s_1 + s_3 + s_5 + s_7 + s_9) - s_5 =$$
$$= S - (s_1 + s_5 + s_9) - (s_3 + s_5 + s_7),$$

или с учетом равенства (14)

$$s_3 + s_5 + s_7 = S - 2(s_3 + s_5 + s_7).$$

Итак,

$$3(s_3 + s_5 + s_7) = S,$$

или

$$s_3 + s_5 + s_7 = \frac{1}{3}S.$$

Примечание. Аналогичное утверждение остается в силе и в том случае, когда стороны четырехугольника $ABCD$ разделены на n частей, где $n > 3$. В этом случае сумма четырехугольников, расположенных на диагонали четырехугольника $ABCD$, равна $\frac{1}{n} S_{ABCD}$.

21. Пусть число дам, присутствовавших на балу, равно n, тогда число кавалеров равно $42 - n$. Дама с номером k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ танцевала с $k + 6$ кавалерами. Следовательно, дама с номером n танцевала с $n + 6$ кавалерами. Поскольку по условиям задачи это были все кавалеры, присутствовавшие на балу, то $42 - n = n + 6$. Решая это уравнение, получаем $n = 18$. Следовательно, среди танцевавших на балу было 18 дам и $42 - 18 = 24$ кавалера.

22. Из условий задачи следует, что угол KAL — тупой. Выберем систему координат так, чтобы точки K, L и A имели следующие координаты: $K = (-a, 0)$, $L = (b, 0)$, $A = (0, -c)$, где a, b, c — некоторые положительные числа (рис. 123). Вычислим координаты точек B, C и M.

Вершина B лежит на прямой, проходящей через точку K и перпендикулярной прямой AK. Уравнение этой прямой имеет вид $ax - cy + a^2 = 0$. Кроме того,

$$\frac{BK}{AK} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3},$$

или $(x + a)^2 + y^2 = 3(a^2 + c^2)$. Решая систему этих уравнений, находим координаты точки B: $B = (c\sqrt{3} - a, a\sqrt{3})$.

Вершина C лежит на прямой, проходящей через точку L и перпендикулярной прямой AL. Уравнение

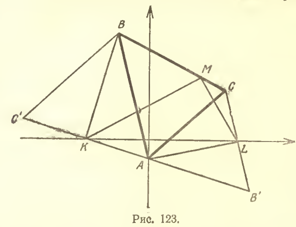


Рис. 123.

этой прямой имеет вид $bx + cy - b^2 = 0$. Кроме того,

$$\frac{CL}{AL} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6},$$

или $(x-b)^2 + y^2 = {}^1/_3 (b^2 + c^2)$. Решая систему этих уравнений, находим координаты точки

$$C: C = \left(b - c\frac{\sqrt{3}}{3},\ b\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

Поскольку точка M лежит на отрезке BC и $BM = 3MC$, то

$$M = \frac{1}{4}B + \frac{3}{4}C = \left(\frac{1}{4}(3b - a),\ \frac{\sqrt{3}}{4}(a + b)\right).$$

Нетрудно проверить, что $KM \perp ML$ и $KM/ML = \sqrt{3} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$, из чего и следует утверждение задачи [1].

23. Докажем утверждение задачи методом математической индукции по числу шаров N.

Утверждение. *Если в пространстве задана фигура F объемом V, содержащаяся в объединении N*

[1] Читателю предоставляется возможность найти чисто геометрическое решение. — *Прим. ред.*

открытых шаров $B_1, B_2, \ldots, B_N$, то существует такое подмножество шаров $B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots, B_{i_r}$, что входящие в него шары попарно не пересекаются, а сумма их объемов больше $\frac{1}{27}V$.

Доказательство. При $N=1$ утверждение очевидно. Шар B_1 содержит фигуру F объемом V. Следовательно, объем шара B_1 не меньше V и поэтому больше $\frac{1}{27}V$.

Предположим, что утверждение верно при некотором натуральном числе N. Докажем, что тогда оно выполняется и при числе открытых шаров, равном $N+1$.

Итак, пусть фигура F объемом V содержится в объединении шаров $B_1, B_2, \ldots, B_{N+1}$. Не ограничивая общности, можно предположить, что объем V_{N+1} шара B_{N+1} не меньше объема каждого из остальных шаров. Пусть B' — шар, центр которого совпадает с центром шара B_{N+1}, а радиус равен $3r$, где r — радиус шара B_{N+1}. Тогда объем V' шара B' равен $27V_{N+1}$. Пусть V_0 — объем тела $F_0 = F \setminus B'$. Поскольку фигура F_0 и шар B' не имеют общих точек, а F содержится в объединении F_0 и B', то $V \leqslant V_0 + 27V_{N+1}$.

Любая точка фигуры F_0 принадлежит по крайней мере одному из шаров $B_1, B_2, \ldots, B_N$. Не уменьшая общности, можно предположить, что при некотором k, удовлетворяющем неравенству $0 \leqslant k \leqslant N$, каждый из шаров $B_1, B_2, \ldots, B_k$ имеет общую точку с фигурой F_0, а каждый из шаров $B_{k+1}, B_{k+2}, \ldots, B_N$ не пересекается с F_0. Тогда F_0 содержится в объединении шаров $B_1, B_2, \ldots, B_k$.

Расстояние от центра шара B_{N+1} до любой точки тела F_0 не меньше $3r$, поэтому расстояние от любой точки шара B_{N+1} до любой точки тела F_0 не меньше $2r$. Диаметр любого из шаров $B_1, B_2, \ldots, B_k$ не больше диаметра шара B_{N+1}, то есть $2r$. Следовательно, любой из шаров $B_1, B_2, \ldots, B_k$ не пересекается с шаром B_{N+1}. Число шаров $B_1, B_2, \ldots, B_k$ не больше N. Следовательно, по предположению индукции существует такое подмножество $B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots, B_{i_r}$ множества шаров $B_1, B_2, \ldots, B_k$, что все шары, принадлежащие этому подмножеству, попарно не пересекаются, а сумма их объ-

ёмов больше $\frac{1}{27}V_0$, то есть больше $\frac{1}{27}V - V_{N+1}$. Поскольку шар B_{N+1} не пересекается ни с одним из шаров $B_1, B_2, \ldots, B_k$, то шары $B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots, B_{i_r}, B_{N+1}$ тем более попарно не пересекаются и сумма их объемов больше $\left(\frac{1}{27}V - V_{N+1}\right) + V_{N+1} = \frac{1}{27}V$.

24. Соединив точку касания сферы и любой из граней многогранника со всеми вершинами, принадлежащими этой грани, получим разбиение грани в сумму неперекрывающихся треугольников, одна из вершин которых совпадает с точкой касания грани и сферы, а две остальные — с вершинами многогранника, принадлежащими рассматриваемой грани. Треугольники PAB и QAB, расположенные в различных гранях многогранника и имеющие общую сторону AB — ребро многогранника, раскрашены в различные цвета. Докажем, что их площади равны.

Плоскость π, проходящая через центр сферы и точки касания P и Q сферы с гранями многогранника, перпендикулярна плоскостям, содержащим треугольники PAB и QAB. Следовательно, плоскость π перпендикулярна прямой AB.

Пусть прямая AB пересекается с плоскостью π в точке C. Тогда $CP = CQ$, поскольку отрезки касательных к сфере, проведенные из одной и той же точки, равны. Кроме того, из определения точки C следует, что $CP \perp AB$ и $CQ \perp AB$, то есть отрезки CP и CQ — высоты треугольников ABP и ABQ. Так как эти треугольники имеют общее основание, то их площади равны.

Все грани многогранника можно разбить указанным образом на треугольники. При этом каждому треугольнику, окрашенному в один цвет, поставлен во взаимно-однозначное соответствие треугольник равной площади, окрашенный в другой цвет. Тем самым утверждение задачи доказано.

25. Начнем с доказательства леммы.

Лемма. *Если $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены одной и той же степени с целочисленными коэффициентами и при любом натуральном n число $g(n)$ делится на $f(n)$, то существует такое целое число c, что $g(x) = cf(x)$.*

Доказательство. По условиям леммы для каждого натурального числа n существует такое целое число a_n, что $g(n) = a_n f(n)$. Пусть степень многочлена g не выше степени многочлена f, равной r. Тогда

$$f(x) = f_0 + f_1 x + \ldots + f_{r-1}x^{r-1} + f_r x^r,$$
$$g(x) = g_0 + g_1 x + \ldots + g_{r-1}x^{r-1} + g_r x^r,$$

где $f_r \neq 0$ и

$$\frac{f(n)}{n^r} = \frac{f_0}{n^r} + \frac{f_1}{n^{r-1}} + \ldots + \frac{f_{r-1}}{n} + f_r,$$

откуда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n^r} = f_r$. Аналогичным образом докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{g(n)}{n^r} = g_r$. Поскольку $f_r \neq 0$, то из равенства

$$\frac{g(n)}{n^r} = a_n \frac{f(n)}{n^r}$$

следует, что последовательность $\{a_n\}$ стремится к числу g_r/f_r.

Члены последовательности $\{a_n\}$ — целые числа, а такая последовательность сходится в том и только в том случае, если, начиная с некоторого номера, все члены ее постоянны.

Итак, существует такое натуральное число N, что $a_n = c$ при всех $n > N$. Тогда при всех $n > N$ выполняется равенство $g(n) = cf(n)$. Оно означает, что любое натуральное число $n > N$ является корнем многочлена $g(x) - cf(x)$. Но любой многочлен, не равный тождественно нулю, имеет лишь конечное число корней. Следовательно, многочлен $g(x) - cf(x)$ тождественно равен нулю, или $g(x) = cf(x)$, что и требовалось доказать.

По доказанной лемме либо степени многочленов f и g равны (при $c \neq 0$), либо g — многочлен, тождественно равный нулю (при $c = 0$). Следовательно, достаточно рассмотреть случай, когда g — многочлен большей степени, чем f.

Пусть h и r — частное и остаток от деления многочлена g на f. Тогда

$$g = hf + r, \tag{1}$$

причем степень многочлена r меньше степени многочлена f.

Коэффициенты многочленов h и r рациональны. Пусть a — наименьший общий знаменатель коэффициентов обоих многочленов h и r. Тогда коэффициенты многочленов $H = ah$ и $R = ar$ — целые числа, и, умножая обе части равенства (1) на a, получаем

$$ag = Hf + R. \qquad (2)$$

Следовательно, ag — также многочлен с целочисленными коэффициентами.

Ясно, что при любом натуральном n число $ag(n)$ делится на $f(n)$. Из соотношения (2) видно, что на число $f(n)$ число $R(n) = ag(n) - H(n) \cdot f(n)$ делится при $n = 1, 2, \ldots$ Поскольку степень многочлена R, равная степени многочлена r, меньше степени многочлена f, то из замечания, приведенного в начале решения, следует, что многочлен $R = ar$ тождественно равен нулю. Таким образом, многочлен r также тождественно равен нулю, и из соотношения (1) мы получаем, что $g = hf$.

Покажем на примере, что коэффициенты многочлена h могут не быть целыми числами. Пусть $f(x) = 2$, $g(x) = x^2 + x$. При любом целом n число $g(n) = n(n+1)$ четно, поскольку одно из чисел n и $(n+1)$ четно. Следовательно, число $g(n)$ делится на $f(n) = 2$ при $n = 1, 2, \ldots$. Но коэффициенты многочлена $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$, очевидно, нецелые.

26. Кратчайшим маршрутом между двумя точками на поверхности сферы служит дуга окружности большого круга, проходящего через эти точки и центр земного шара. Следовательно, самолет летит по дуге окружности большого круга, проходящего через Осло. Так как из Осло самолет держит курс на запад, то Осло является самой северной точкой окружности этого большого круга. Длина окружности большого круга равна 10 000 км, а разность долгот Осло и города X составляет 90°. Значит, город X расположен на экваторе в точке, лежащей под 79° 17′ западной долготы. Взяв карту, читатель сможет без труда убедиться в том, что лишь один город вблизи указанной точки обладает

аэродромом, способным принять самолет из Осло. Это столица Эквадора — город Кито.

Если учесть, что маршрут самолета пролегает не по самой поверхности Земли, а на высоте около 10 км, то расстояние, преодоленное самолетом за время пути, составит $\frac{1}{4}[2\pi(R+10)] = \frac{1}{4}2\pi R + 5\pi = 10\,000 + 15$ км, где R — радиус Земли.

Примечание. Решение задачи не зависит от широты, на которой расположен Осло. Если бы самолет отправился в путь из любой точки Земли с западной долготой 10° 43′, а все остальные условия задачи сохранились бы прежними, то, преодолев около 10 000 км, он все равно приземлился бы в Кито.

27. I решение. Пусть E — точка пересечения прямых AC и BD, а E' — точка пересечения прямых $A'C'$

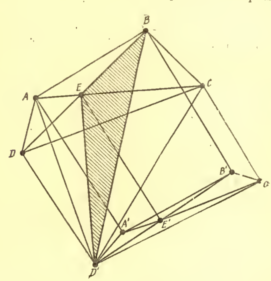


Рис. 124.

и $B'D'$ (рис. 124). Поскольку точки A', B', C', D' получены при параллельном проектировании точек A, B, C, D, то проекциями прямых AC и BD служат прямые $A'C'$ и $B'D'$, в силу чего E' — проекция точки E.

Следовательно,

$$AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD' \parallel EE'. \qquad (1)$$

Таким образом, прямые AA' и CC' параллельны плоскости $BB'D'D$. Пусть h_1 и h_2 — расстояния от этих прямых до плоскости $BB'D'D$.

Тетраэдр $ABCD'$ можно рассматривать как сумму тетраэдров $ABD'E$ и $CBD'E$. Если считать, что основанием тетраэдров $ABD'E$ и $CBD'E$ служит треугольник $BD'E$, то объем каждого из них можно записать в виде

$$V_{ABD'E} = \frac{1}{3} h_1 S_{BD'E}, \quad V_{CBD'E} = \frac{1}{3} h_2 S_{BD'E}.$$

Итак, объем тетраэдра $ABCD'$ равен

$$V_{ABCD'} = \frac{1}{3}(h_1 + h_2) S_{BD'E}. \qquad (2)$$

Тетраэдр $A'B'C'D$ также можно рассматривать как сумму тетраэдров $A'B'DE'$ и $C'B'DE'$. Его объем равен

$$V_{A'B'C'D} = \frac{1}{3}(h_1 + h_2) S_{B'DE'}. \qquad (3)$$

Из соотношений (2) и (3) следует, что исходная за-

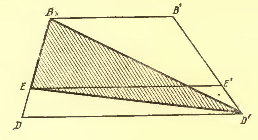


Рис. 125.

дача сводится к доказательству равенства площадей треугольников $BD'E$ и $B'DE'$:

$$S_{BD'E} = S_{B'DE'}. \qquad (4)$$

Поскольку $BB' \parallel DD'$ (см. соотношения (1)), то $BB'D'D$ — трапеция с основаниями BB' и DD' и прямая EE' параллельна основаниям (рис. 125). Если h_3

и h_4 — расстояния от прямой EE' до прямых BB' и DD', то

$$S_{DD'B} = \frac{1}{2} DD' \cdot (h_3 + h_4), \quad S_{DD'E} = \frac{1}{2} DD' \cdot h_4,$$

откуда

$$S_{BD'E} = S_{DD'B} - S_{DD'E} = \frac{1}{2} DD' \cdot h_3.$$

Доказав при помощи аналогичных рассуждений, что

$$S_{B'DE'} = \frac{1}{2} DD' \cdot h_3,$$

получим равенство (4).

Примечание. Все рассуждения и рис. 124 и 125 относились к тому случаю, когда четырехугольник $ABCD$ выпуклый, но и в случае невыпуклого четырехугольника доказательство утверждения задачи проводится аналогично.

28. Пусть сферический сегмент соответствует центральному углу α (по условиям задачи $0 < \alpha < \pi$), а β — любой угол, удовлетворяющий неравенству $0 < \beta < \alpha$. Рассмотрим прямую пирамиду $OABCD$, основанием которой служит квадрат $ABCD$, вписанный в заданный сферический сегмент, вершина O совмещена с центром сферы, от которой отсечен сегмент, и $\angle AOC = \beta$ (рис. 126). Пусть $\angle AOD = \gamma$, P и Q — середины отрезков AD и AC.

Нетрудно видеть, что

$$AQ = AP\sqrt{2},$$

$$AP = AO \sin(\angle AOP) = AO \sin\frac{\gamma}{2},$$

$$AQ = AO \sin(\angle AOQ) = AO \sin\frac{\beta}{2},$$

в силу чего

$$\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{2}\sin\frac{\gamma}{2}. \qquad (1)$$

Если R — радиус сферы, от которой отсечен сегмент, то расстояния между точками A и C, B и D на сегменте равны $R\beta$, а расстояния между точками A и B, B и C, C и D, D и A равны $R\gamma$.

Если существует изометрия φ, отображающая сферический сегмент на некоторое подмножество плоскости, то $\varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)\varphi(D)$ — такой четырехугольник на плоскости, для которого $\varphi(A)\varphi(B) = \varphi(B)\varphi(C) = \varphi(C)\varphi(D) = \varphi(D)\varphi(A) = R\gamma$. Следовательно, $\varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)\varphi(D)$ — ромб. Поскольку диагонали $\varphi(A)\varphi(C)$ и $\varphi(B)\varphi(D)$

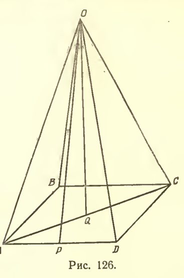


Рис. 126.

равны $R\beta$, то $\varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)\varphi(D)$ — квадрат и поэтому $\varphi(A)\varphi(C) = \sqrt{2}\varphi(A)\varphi(B)$, или

$$\beta = \sqrt{2}\gamma. \qquad (2)$$

Из соотношений (1) и (2) следует, что $\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{2}\sin\frac{\beta}{2\sqrt{2}}$ для любого угла β, удовлетворяющего неравенству $0 < \beta < \alpha$. В частности, подставляя вместо β угол $\frac{\beta}{\sqrt{2}}$, получаем $\sin\frac{\beta}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}\sin\frac{\beta}{4}$. Сравнивая два последних равенства, находим $\sin\frac{\beta}{2} = 2\sin\frac{\beta}{4}$. С другой стороны, $\sin\frac{\beta}{2} = 2\sin\frac{\beta}{4}\cos\frac{\beta}{4}$, поэтому $\cos\frac{\beta}{4} = 1$, что невозможно, поскольку $0 < \frac{\beta}{4} < \frac{\alpha}{4} < \frac{\pi}{4}$.

Полученное противоречие доказывает, что изометрия φ, которая бы отображала сферический сегмент на некоторое подмножество плоскости, не существует.

29. Пусть S и T — концентрические окружности. Докажем, что точки касания окружностей K_1 и K_2, K_2 и K_3 и так далее равноудалены от общего центра O окружностей S и T.

Пусть A_i $(i = 1, 2, \ldots)$ — точки касания окружностей K_i и T, B_i — точки касания окружностей K_i и K_{i+1}, C_i — точки касания окружностей K_i и S, O_i — центры окружностей K_i, r и R — радиусы окружностей T и S (рис. 127).

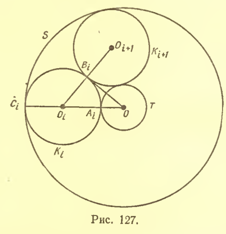


Рис. 127.

Тогда радиус окружности K_i равен $\frac{1}{2}A_iC_i = \frac{1}{2}(R - r)$, то есть радиусы всех окружностей K_1, K_2, ... равны. Следовательно, точка B_i совпадает с серединой отрезка O_iO_{i+1} и угол OB_iO_i прямой. По теореме Пифагора находим

$$OB_i^2 = OO_i^2 - O_iB_i^2 = (OO_i + O_iB_i)(OO_i - O_iB_i) = \\ = (OO_i + O_iC_i)(OO_i - O_iA_i) = OC_i \cdot OA_i = Rr.$$

Это означает, что $OB_1 = OB_2 = \ldots = \sqrt{Rr}$, поэтому точки B_1, B_2, ... равноудалены от точки O.

Предположим теперь, что окружности S и T не концентрические. Поскольку окружность T лежит внутри окружности S, то существует такая окружность K, что

инверсия φ относительно нее отображает окружности S и T на концентрические окружности и центр P окружности K лежит вне окружности S[1].

Инверсия φ представляет собой взаимно-однозначное отображение множества точек плоскости, из которых выколота точка P, и любую окружность, не содержащую точку P, переводит в некоторую окружность, также не содержащую точку P. Отображением, обратным инверсии φ, служит сама инверсия φ, то есть $\varphi(\varphi(A)) = A$ для любой точки A, отличной от P.

Итак, окружности $S' = \varphi(S)$ и $T' = \varphi(T)$ концентрические, а окружности K_1, K_2, ... касаются окружностей S и T и переходят при инверсии φ в окружности K_1', K_2', ..., касающиеся окружностей S' и T'. При этом окружность S' содержит окружность T', а точка P лежит вне окружности S'. Кроме того, окружность K_1' касается окружности K_2', окружность K_2' — окружности K_3' и так далее. Поскольку S' и T' — концентрические окружности, то из рассмотренного в начале решения примера

[1] Относительно инверсии см., например, книгу Р. Куранта и Г. Роббинса «Что такое математика» (М. — Л., ГИТТЛ, 1947, гл. III, § 4). Точку P следует взять вне S на линии центров окружностей S и T, радиус окружности K можно выбрать произвольно, например пусть он равен единице. Поместив начало системы координат в точку P, направим ось OX вдоль линии центров окружностей S и T по направлению к этим окружностям. Тогда точки пересечения OX с S и T имеют абсциссы

$$x,\ x + 2R,\ x + a,\ x + a + 2r,$$

где $x > 0$, $a > 0$ и $b = 2R - a - 2r > 0$. Выбирая P с нужной стороны S, можно считать, что $a < b$.

После инверсии φ образы этих точек будут по-прежнему лежать на OX и иметь абсциссы

$$\frac{1}{x},\quad \frac{1}{x+2R},\quad \frac{1}{x+a},\quad \frac{1}{x+a+2r}.$$

Окружности $\varphi(S)$ и $\varphi(T)$ будут концентричными, если выполняется равенство

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+a} = \frac{1}{x+a+2r} - \frac{1}{x+2R} \tag{1}$$

или

$$a(x+a+2r)(x+2R) = x(x+a)b. \tag{2}$$

При $x = 0$ левая часть больше правой, при x большом положительном правая часть больше левой, так как $b > a$. Следовательно, квадратное уравнение (2) имеет положительный корень x и при том же x выполняется (1). — *Прим. ред.*

следует, что точки касания окружностей K_1' и K_2', K_2' и K_3' и так далее лежат на некоторой окружности L', расположенной внутри S'. Следовательно, точка P не принадлежит окружности L' и $\varphi(L')$ — окружность.

Выполнив инверсию φ еще раз, мы убедимся в том, что точки касания окружностей $\varphi(K_1') = K_1$ и $\varphi(K_2') = K_2$, $\varphi(K_2') = K_2$ и $\varphi(K_3') = K_3$ и так далее лежат на некоторой окружности $\varphi(L')$.

30. Пусть $P_1, P_2, \ldots, P_6$ — заданные точки. В каждом из треугольников $P_iP_jP_k$ выкрасим наименьшую сторону в красный цвет. В результате этой операции одни отрезки P_rP_s станут красными, а другие по-прежнему будут нераскрашенными.

Достаточно доказать, что существует треугольник с вершинами в заданных точках и тремя красными сторонами. Действительно, наибольшая сторона такого треугольника одновременно является наименьшей стороной другого треугольника, поскольку она выкрашена в красный цвет. Из каждой заданной точки выходят 5 отрезков, соединяющих ее с остальными заданными точками. Следовательно, либо по крайней мере 3 из этих отрезков выкрашены в красный цвет, либо по крайней мере 3 отрезка остались невыкрашенными.

Если из точки P_1 выходят по крайней мере 3 отрезка, выкрашенных в красный цвет (например, отрезки P_1P_2, P_1P_3, P_1P_4), то в треугольнике $P_2P_3P_4$, образованном другими концами этих отрезков, по крайней мере одна из сторон (наименьшая) выкрашена в красный цвет. Пусть, например, это будет отрезок P_2P_3. Тогда в треугольнике $P_1P_2P_3$ все стороны окажутся выкрашенными в красный цвет.

Если же из точки P_1 выходят по крайней мере 3 отрезка, не выкрашенных в красный цвет (например, отрезки P_1P_2, P_1P_3, P_1P_4), то рассмотрим треугольники $P_1P_2P_3$, $P_1P_2P_4$, $P_1P_3P_4$. В каждом из них по крайней мере одна из сторон выкрашена в красный цвет, но эта сторона не содержит вершины P_1. Следовательно, отрезки P_2P_3, P_2P_4, P_3P_4 выкрашены в красный цвет, то есть все стороны треугольника $P_2P_3P_4$ красные.

Примечание. В приведенном выше решении осталось неиспользованным предположение о том, что заданные точки лежат в одной плоскости.

СОДЕРЖАНИЕ

ИБ № 981

С. Страшевич

ПОЛЬСКИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ

Редактор А. Белевцева
Художник Л. Муратова
Художественный редактор Л. Безрученков
Технический редактор Н. Борисова
Корректор Н. Гиря

Сдано в набор 10.01.78. Подписано к печати 31.03.78. Формат 84×108[1]/32 Бумага типографская № 2. Латинская гарнитура. Высокая печать. 5,38 бум. л., печ. усл. л. 18,06. Уч.-изд. л. 15,50. Изд. № 12/9530. Зак. 933. Цена 1 р.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой
Союзполиграфпрома при Государственном
комитете Совета Министров СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли. 198052, Ленинград, Л-52,
Измайловский проспект, 29.

Редакция
научно-популярной
и
научно-фантастической
литературы
издательства «Мир»

в серии

«Задачи и олимпиады»

выпустила следующие книги:

1976 г.

Ч. Тригг. Задачи с изюминкой. Перевод с английского.

1977 г.

Й. Кюршак, Д. Нейкомм, Д. Хайош, Я. Шурани. Венгерские математические олимпиады. Перевод с венгерского.

Избранные задачи из журнала «American Mathematical Monthly». Перевод с английского.

В 1978 г. серия

«Задачи и олимпиады»

пополнится книгой

Ст. Страшевич, Е. Бровкин. Польские математические олимпиады. Перевод с польского.

В 1979 г.

редакция
научно-популярной
и
научно-фантастической
литературы
издательства «Мир»

в серии
«Задачи и олимпиады»

ПРЕДПОЛАГАЕТ
ВЫПУСТИТЬ
КНИГУ

Дж. Уокер. Физика в задачах. Перевод с английского.

Редакция
научно-популярной
и
научно-фантастической
литературы
издательства «Мир»
в серии
«Занимательная математика»
ВЫПУСТИЛА СЛЕДУЮЩИЕ КНИГИ:

1971 г.

М. Гарднер. **Математические головоломки и развлечения.** Перевод с английского.

1972 г.

М. Гарднер. **Математические досуги.** Перевод с английского.

1973 г.

Л. Кэррол. **История с узелками.** Перевод с английского.

1974 г.

М. Гарднер. **Математические новеллы.** Перевод с английского.

С. Голомб. **Полимино.** Перевод с английского.

Г. Штейнгауз. **Задачи и размышления.** Перевод с польского.

1975 г.

Д. Бизам, Я. Герцег. Игра и логика. Перевод с венгерского.

Г. Дьюдени. 520 головоломок. Перевод с английского.

1976 г.

Э. Эбботт. Флатландия. Перевод с английского. **Д. Бюргер.** Сферландия. Перевод с голландского.

1977 г.

Г. Линдгрен. Занимательные задачи на разрезание. Перевод с английского.

В 1978 г.

серия

«Занимательная математика»

пополнится

книгами

Ст. Барр. Россыпи головоломок. Перевод с английского.

Д. Бизам, Я. Герцег. Многоцветная логика. Перевод с венгерского.

В 1979 г.

в серии

«Занимательная математика»

предполагается

выпустить

книгу

Г. Дьюдени. Кентерберийские головоломки. Перевод с английского.

AB

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_n$$

1 руб.

С. Страшевич. Е. Бровкин
ПОЛЬСКИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ

AB
$n_1 + n_2 + \ldots + n_n$